

A. C. MORGADO / E. WAGNER / M. JORGE

GEOMETRIA II

(Métrica Plana)

CONVENIO MEC-FUNAME SPEN
p. 111/112 - 500

LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S. A.
Rio de Janeiro — São Paulo — Belo Horizonte
Recife — Curitiba

SUMÁRIO

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte do
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, GBI

M845g Morgado, Augusto César, 1944—
Geometria II: métrica plana [por] A.C. Morgado,
E. Wagner e M. Jorge. Rio de Janeiro, F. Alves,
1973

286p. Ilust. cm

I. Geometria plana — Problemas e exercícios. I.
Wagner, Eduardo, 1949— II. Jorge, Miguel. III. Tí-
tulo.

CDD 17. — 513.1

18. — 516.22

CDU — 513.1

73-0460

CAPÍTULO I

	Pág.
Divisão de um segmento em uma razão.....	1
Divisão harmônica.....	3
1.10 — Distância entre divisores harmônicos.....	6
1.12 — Problemas resolvidos.....	8
Problemas propostos.....	13

CAPÍTULO II

Felxe de paralelas.....	17
2.6 — Teorema das bissetrizes.....	21
2.7 — Divisão harmônica pelos pés das bissetrizes.....	22
2.8 — Divisão da bissetriz interna, harmonicamente pelo incentro e excentro.....	24
2.9 — Círculo de Apolônio.....	25
2.10 — Rolo do círculo de Apolônio.....	25
2.11 — Problemas resolvidos.....	26
Problemas propostos.....	35

CAPÍTULO III

3.1 — Triângulos semelhantes.....	38
3.6 — Casos clássicos de semelhança de triângulos.....	41
3.7 — Felxe de retas concorrentes.....	42
3.8 — Polígonos semelhantes.....	43
3.9 — Felxe harmônico.....	47
3.10 — Retas antiparalelas.....	49
3.11 — Problemas resolvidos.....	52
Problemas propostos.....	60

CAPÍTULO IV

Triângulos retângulos.....	73
4.1 — Relações métricas.....	73
4.2 — Triângulos retângulos com lados em progressão aritmética.....	75
4.3 — Trapézia isósceles circunscritível.....	76
4.4 — Tangente comum a círculos tangentes.....	77

4.5 — Problemas resolvidos.....	77
Problemas propostos.....	86
CAPÍTULO V	
Triângulos quaisquer.....	100
5.1 — Lei dos co-senos.....	100
5.2 — Síntese de Clairaut.....	101
5.3 — Lei dos senos (Lamy).....	101
5.4 — Relação de Stewart.....	102
5.5 — Teorema de Menelaus.....	103
5.6 — Teorema de Ceva.....	104
5.7 — Cálculo dos principais cevianas.....	105
5.8 — Problemas resolvidos.....	111
Problemas propostos.....	119
CAPÍTULO VI	
Áreas (introdução).....	128
6.10 — Área do retângulo.....	136
6.11 — Área do paralelogramo.....	137
6.12 — Área do triângulo.....	137
6.13 — Área do losango.....	137
6.14 — Área do trapézio.....	138
6.15 — Área do polígono regular.....	138
6.16 — Área do círculo.....	139
6.17 — Área de um setor circular.....	139
6.18 — Área do segmento circular.....	140
6.19 — Área da coroa circular.....	140
6.20 — Área do triângulo em função dos lados.....	141
6.21 — Teorema.....	141
6.22 — Razão entre áreas de triângulos semelhantes.....	142
6.23 — Razão entre áreas de triângulos que possuem um ângulo comum.....	143
6.24 — Problemas resolvidos.....	144
Problemas propostos.....	154
CAPÍTULO VII	
O triângulo e seus círculos.....	172
7.1 — O círculo inscrito.....	172
7.2 — Os círculos exinscritos.....	173
7.3 — Relações principais.....	173
7.4 — Cevianas isogonais.....	175
7.5 — O círculo circunscrito.....	176
7.6 — Problemas resolvidos.....	177
Problemas propostos.....	181
CAPÍTULO VIII	
Os quadriláteros.....	187
8.1 — Quadrilátero inscritível.....	187
8.2 — Quadrilátero circunscritível.....	187

8.3 — Relação de Euler (quadrilátero qualquer).....	188
8.4 — Aplicação nos trapézios.....	189
8.5 — Aplicação no paralelogramo.....	190
8.6 — Relações em quadriláteros inscritíveis.....	190
8.7 — Área do quadrilátero convexo.....	192
8.8 — Área do quadrilátero circunscritível.....	193
8.9 — Área do quadrilátero inscritível.....	193
8.10 — Área do quadrilátero inscritível e circunscritível.....	195
8.11 — Problemas resolvidos.....	196
Problemas propostos.....	198

CAPÍTULO IX

Relações métricas no círculo.....	202
9.1 — Teorema.....	202
9.2 — Teorema.....	202
9.3 — Definição.....	203
9.4 — Teorema.....	204
9.5 — Eixo radical.....	206
9.6 — Centro radical.....	211
9.7 — Problemas resolvidos.....	212
Problemas propostos.....	217

CAPÍTULO X

Polígonos regulares.....	224
10.1 — Definição.....	224
10.2 — Construção.....	224
10.3 — Lado e apótema.....	227
10.4 — Duplicação do gênero de um polígono convexo.....	228
10.5 — Cálculo dos lados dos polígonos regulares inscritos num polígono de raio R.....	229
10.6 — Comprimento do círculo.....	234
10.7 — Comprimento de um arco.....	237
10.8 — Cálculo de π	237
10.9 — Problemas resolvidos.....	239
Problemas propostos.....	243

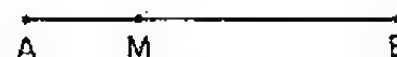
APÊNDICE

Homotetia.....	250
A reta de Simpson-Wallace.....	257
A reta de Euler — O círculo das nove pontas.....	260
Triângulos pedais.....	263
As simedianas.....	264
As fórmulas de Euler.....	272
Inversão.....	277
RESPOSTAS DOS TESTES.....	284

DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM UMA RAZÃO

1.1 — Dizemos que o ponto M divide interiormente o segmento \overline{AB} na razão k quando

$$\frac{MA}{MB} = k$$



1.2 — Dizemos que o ponto N divide exteriormente o segmento \overline{AB} na razão k quando

$$\frac{NA}{NB} = k$$



onde MA , MB , NA e NB representam as medidas dos segmentos \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{NA} e \overline{NB} e $k > 0$.

Assim, em nosso curso vamos associar ao ponto P e ao segmento \overline{AB} a razão $\frac{PA}{PB}$.

Exemplos



$$M \text{ divide } \overline{AB} \text{ na razão } \frac{MA}{MB} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{A divide } \overline{MB} \text{ na razão } \frac{AM}{AB} &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ \text{B divide } \overline{AM} \text{ na razão } \frac{BA}{BM} &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

1.3 — TEOREMA

Dado um segmento \overline{AB} e uma razão k , existe apenas um ponto M que divide internamente o segmento nesta razão.

Demonstração



Consideremos um ponto M' que divida internamente o segmento na mesma razão. Temos, então,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} \text{ e } \frac{MA + MB}{MB} = \frac{M'A + M'B}{M'B}$$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{M'B} \Rightarrow MB = M'B$$

Então, $M \equiv M'$.

1.4 — TEOREMA

Dado um segmento \overline{AB} e uma razão k , existe apenas um ponto N que divide externamente o segmento nesta razão.

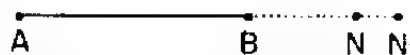
Demonstração

Consideremos um ponto N' que divida externamente o segmento na razão. Temos que

$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B} \text{ e } \frac{NA - NB}{NB} = \frac{N'A - N'B}{N'B}$$

$$\frac{AB}{NB} = \frac{AB}{N'B} \Rightarrow NB = N'B$$

Então, $N \equiv N'$.

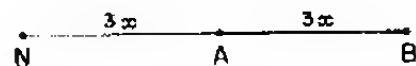


1.5 — OBSERVAÇÃO

Consideremos as divisões abaixo:

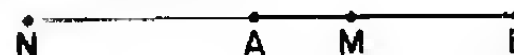


$$\frac{MA}{MB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{NA}{NB} = \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}$$

Verificamos que, dado um segmento \overline{AB} e uma razão $k \neq 1$ (por exemplo), conseguimos encontrar dois pontos que dividem \overline{AB} nesta razão: um interior e outro exterior. Quando um segmento \overline{AB} está dividido



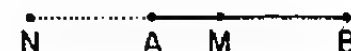
por dois pontos M e N , na mesma razão, dizemos que o segmento \overline{AB} está dividido harmonicamente.

DIVISÃO HARMÔNICA

1.6 — DEFINIÇÃO

Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento \overline{AB} quando

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$



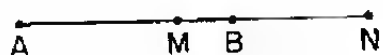
Como $\frac{MA}{MB} = k$ e $\frac{NA}{NB} = k$, os pontos M e N dividem o segmento

\overline{AB} na mesma razão (um internamente e outro externamente). Estes pontos chamam-se conjugados harmônicos de \overline{AB} na razão k .

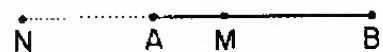
1.7 — OBSERVAÇÃO

Quando a razão da divisão harmônica (k) é menor, maior ou igual a 1 (um) verificam-se facilmente as configurações abaixo.

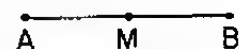
$$k > 1$$



$$0 < k < 1$$



$$N \rightarrow \infty \quad k = 1$$



1.8 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} \pm \frac{1}{AN}$$

— para $k < 1$
+ para $k > 1$

1.º caso: $k > 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$



$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$

ou

$$AM(AN - AB) = AN(AB - AM)$$

$$AM \cdot AN - AM \cdot AB = AN \cdot AB - AM \cdot AN$$

$$2AM \cdot AN = AN \cdot AB + AM \cdot AB \quad \text{e } \div \text{ por } AM \cdot AN \cdot AB,$$

temos

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

2.º caso: $k < 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AB + AN}$$

$$AM(AB + AN) = AN(AB - AM)$$

$$AM \cdot AB + AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN$$

$$2AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN \quad \text{e } \div \text{ por } AM \cdot AN \cdot AB,$$

temos

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$$

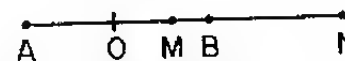
1.9 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$OA^2 = OM \cdot ON$$

sendo O ponto médio de \overline{AB} .

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$



$$\frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

substituindo OB por OA, temos

$$(OM + OA)(ON - OA) = (ON + OA)(OA - OM)$$

$$OM \cdot ON - OM \cdot OA + ON \cdot OA - OA^2 = ON \cdot OA - OM \cdot ON + OA^2 - OM \cdot OA$$

$$2OM \cdot ON = 2OA^2 \quad \therefore$$

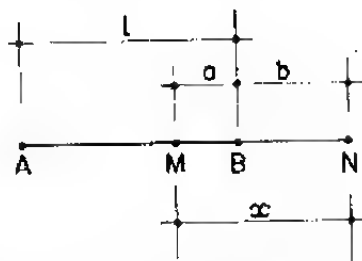
$$OA^2 = OB^2 = OM \cdot ON$$

1.10 — DISTÂNCIA ENTRE DIVISORES HARMÔNICOS

Sejam M e N conjugados harmônicos de \overline{AB} . Assim,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k > 1.$$

Consideremos $AB = l$ e



$\frac{MA}{MB} = k$ dados e calculemos x , que é a distância entre os divisores

harmônicos de \overline{AB} no razão $k > 1$.

$$1) \quad \frac{MA}{MB} = k$$

$$\frac{l-a}{b} = k$$

$$l-a = kb \Rightarrow a = \frac{l}{k+1}$$

$$2) \quad \frac{NA}{NB} = k$$

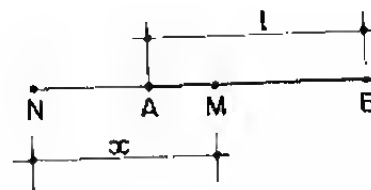
$$\frac{l+b}{b} = k$$

$$l+b = kb \Rightarrow b = \frac{l}{k-1}$$

$$\text{Par 1) e 2), } x = a + b = \frac{l}{k+1} + \frac{l}{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2kl}{k^2 - 1}}$$

Por raciocínio análogo, caso considerássemos $k < 1$,



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k < 1,$$

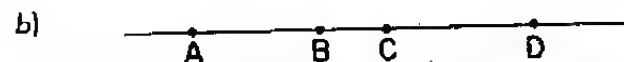
chegamos o

$$\boxed{x = \frac{2kl}{1 - k^2}}$$

1.11 — Sejam A, B, C e D pontos de uma reta.

$$a) \quad \text{Se } \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}, \text{ então } \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD}.$$

De fato, basta permutar os meios ou os extremos de uma delas.

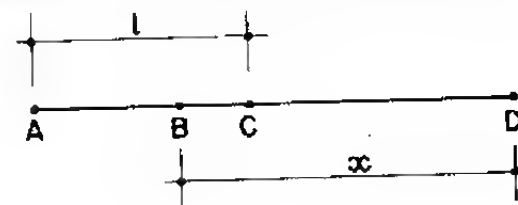


Vimos que B e D são divisores harmônicos de \overline{AC} se A e C forem divisores harmônicos de \overline{BD} e v. v.

$$\text{Sejam } \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = k > 1.$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD} = k' < 1.$$

A relação entre k e k' obtém-se da seguinte forma:



Se B e D são divisores harmônicos de \overline{AC} ,
então, por 1.10,

$$x = \frac{2kl}{k^2 - 1} \quad (1)$$

mas, se A e C dividem harmonicamente BD,

$$1 = \frac{2k'x}{1 - k'^2} \quad (2)$$

substituindo (2) em (1),

$$x = \frac{2k}{k^2 - 1} \cdot \frac{2k'x}{1 - k'^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k^2 - 1)(1 - k'^2) = 4kk' \quad \text{que, resolvida}$$

para k e para k', fornece

$$\boxed{k' = \frac{k-1}{k+1}} \quad \text{e} \quad \boxed{k = \frac{1+k'}{1-k'}} \quad \begin{matrix} k > 1 \\ 0 < k' < 1 \end{matrix}$$

1.12 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Um segmento \overline{AB} é tal que $7AB = 3CD$. Qual será sua medida na unidade $\frac{1}{4}CD$?

Solução

$$AB = \frac{3}{7}CD.$$

$$\text{Seja } u = \frac{1}{4}CD \quad \text{ou} \quad CD = 4u$$

$$AB = \frac{3}{7}4u$$

$$\frac{AB}{u} = \frac{12}{7}^*$$

$$\text{Resposta: } \frac{12}{7}$$

2. Se $AB = 5CD$, calcule:

a) $\frac{3AB}{CD}$ b) $\frac{5AB}{3CD}$

Solução

$$a) \frac{3AB}{CD} = \frac{3 \cdot 5CD}{CD} = 15$$

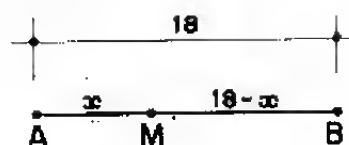
$$b) \frac{5AB}{CD} = \frac{5 \cdot 5CD}{CD} = 25$$

$$\text{Respostas: } \begin{matrix} a) & 15 \\ b) & 25 \end{matrix}$$

3. Se M divide um segmento \overline{AB} , de 18 cm, interiormente na razão $\frac{2}{7}$, calcule MA e MB.

* $\frac{AB}{u}$ é a medida do segmento \overline{AB} na unidade u.

Solução



$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{x}{18-x} = \frac{2}{7}$$

$$7x = 36 - 2x$$

$$9x = 36$$

$$x = 4 \quad \text{logo,}$$

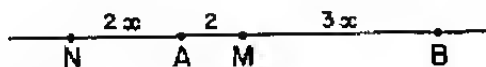
$$18 - x = 14$$

$$\text{Respostas: } MA = 4 \text{ cm}$$

$$MB = 14 \text{ cm}$$

4. Calcule x para que os pontos da figura abaixo formem divisão harmônica.

Solução



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{2}{3x} = \frac{2x}{5x+2}$$

$$6x^2 = 10x + 4$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

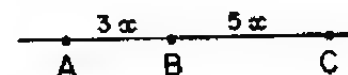
$$\text{Resposta: } x = 2$$

5. Considere os pontos A, B e C sobre uma reta.

$$\text{Se } \frac{BA}{BC} = \frac{3}{5}, \text{ calcule as razões } \frac{AB}{AC} \text{ e } \frac{CA}{CB}$$

Solução

$$\text{Se } \frac{BA}{BC} = \frac{3}{5}, \text{ sejam } AB = 3x \text{ e } BC = 5x$$



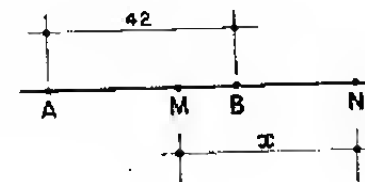
$$\frac{AB}{AC} = \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Respostas: } \frac{3}{7} \text{ e } \frac{7}{5}$$

6. Os pontos M e N dividem o segmento AB de 42 cm na razão $\frac{5}{2}$. Calcule MN.

Solução



$$\text{Como } \frac{5}{2} > 1,$$

temos, por 1.10,

$$x = \frac{2kl}{k^2 - 1} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 42}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{5 \cdot 42}{\frac{21}{4}} = 40$$

$$\text{Resposta: } x = 40 \text{ cm}$$

7. Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento \overline{AB} na razão $\frac{3}{2}$. Sabemos que os pontos A e B dividem o segmento \overline{MN} harmonicamente. Calcule a razão desta divisão.

Salvação

$$\text{Temas} \quad \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k = \frac{3}{2} > 1.$$

$$\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN} = k' < 1.$$

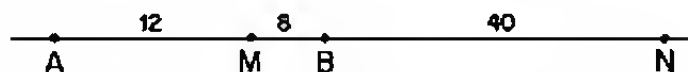
Por 1.11 a) e b) temos

$$k' = \frac{k-1}{k+1} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Respuesta: $k' = \frac{1}{5}$

Verificação

Repare agora o leitor na divisão abaixo



M e N divisores harmônicos de \overline{AB}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MA}{MB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{NA}{NB} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

B e A divisores harmônicos de \overline{MN}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BM}{BN} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \\ \frac{AM}{AN} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow k' = \frac{1}{5}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

8. Se A, B e C são pontos de uma reta (B entre A e C), sendo $AC = 24$ e $BA = 5BC$, então BC mede:

- [illegible]

E NRA

9. Um segmento AB é tal que $3AB = 4CD$. Qual a medida de CD se tomarmos como unidade $\frac{2}{5}$ de AB?

- A) $\frac{3}{10}i$ C) $\frac{8}{15}i$
B) $\frac{10}{3}i$ D) $\frac{15}{8}i$

E) NRA.

10. Um segmento AB é igual a 5 vezes um segmento CD. Qual a razão entre $\frac{3}{2}AB$ e $4CD$?

- A) $6\frac{1}{2}$ C) $\frac{15}{2}$
- B) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{15}{8}$

E) NRA.

11. Qual a razão entre $\frac{5}{4} AB$ e $\frac{2}{3} CD$?

A) $\frac{15}{8}$;

C) $\frac{75}{8}$;

B) $\frac{25}{8}$;

D) $\frac{16}{25}$;

E) NRA.

12. Se $AB = \frac{2}{3} CD$ e $CD = \frac{4}{5} MN$, $\frac{AB}{MN}$ é igual a:

A) $\frac{8}{15}$;

C) $\frac{5}{6}$;

B) $\frac{15}{8}$;

D) $\frac{6}{5}$;

E) NRA.

13. Sejam A, B e C nesta ordem sobre uma reta tais que $AB = 12$ e $BC = 3$. Seja D conjugado harmônico de B em relação ao segmento AC. Então, BD mede:

A) 5;

C) 8;

B) 6;

D) 12;

E) NRA.

14. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

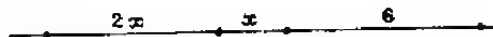
A) 1;

C) 4;

B) 2;

D) 6;

E) NRA.

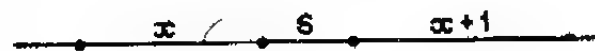


15. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

A) 8; C) 11;

B) 10; D) 12;

E) 14.



16. Considerando a figura abaixo, podemos afirmar que os 4 pontos:



A) nunca formarão uma divisão harmônica;

B) sempre formarão uma divisão harmônica qualquer que seja;

C) formarão uma divisão harmônica se $x > 0$;

D) só formarão divisão harmônica se x for par;

E) NRA.

17. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão

$$\frac{MA}{MB} = \frac{7}{3}. \text{ Se } AB = 40, \text{ MN mede:}$$

A) 24;

C) 40;

B) 38;

D) 42;

E) NRA.

18. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica. Se $AB = 7$

e $MN = 24$, a razão $\frac{MA}{MB}$ é igual a:

A) 2;

C) $\frac{4}{3}$;

B) $\frac{3}{2}$;

D) $\frac{5}{3}$;

E) NRA.

19. Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento \overline{AB} e estão de um mesmo lado de seu ponto médio. P divide \overline{AB} na razão $\frac{2}{3}$ e Q divide AB na razão

$\frac{3}{4}$. Se $PQ = 2$ AB mede:

- A) 50; C) 70;
B) 60; D) 80;

E) 90.

20. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão

$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$. Se J é o ponto médio de MN, a razão $\frac{JA}{JB}$ vale:

- A) k ; C) k^2 ;
B) $2k$; D) $k^2 - 1$;

E) NRA.

CAPÍTULO 2

FEIXE DE PARALELAS

2.1 — TEOREMA

Se um feixe de paralelas determina sobre uma secante segmentos de mesmo comprimento, determinará sobre qualquer outra segmentas de mesma comprimento.

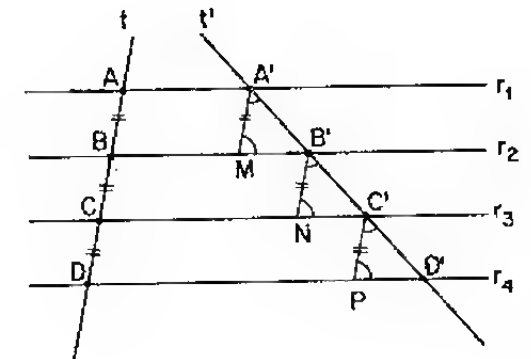
$$H \rightarrow r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \parallel r_4$$

$$AB = BC = CD.$$

$$T \rightarrow A'B' = B'C' = C'D'$$

- D — De fato, como os triângulos $A'MB'$, $B'NC'$ e $C'PD'$ são congruentes, pois possuem um lado de mesma comprimento compreendido entre ângulos respectivamente congruentes,

$$A'B' = B'C' = C'D'. \quad \text{C.Q.D.}$$

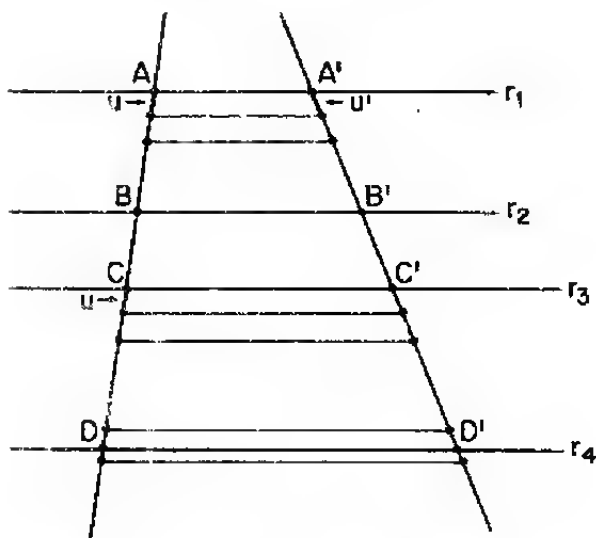


- 2.2 — Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes quaisquer segmentas proporcionais.

$$H \text{ --- } r_1 // r_2 // r_3 // r_4$$

$$T \text{ --- } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

$$D \text{ --- }$$



Seja u um segmento que divide exatamente \overline{AB} e cabe m vezes em \overline{AB} . Traçando paralelas ao feixe como mastra a figura, encontramos u' na outra transversal que divide exatamente $\overline{A'B'}$ e cabe m vezes em $\overline{A'B'}$. Podemos, então, escrever

$$AB = mu \quad \text{e} \quad CD = mu'$$

É claro que u não tem obrigação de dividir \overline{CD} . Assim, marcando u sucessivamente em \overline{CD} , vamos supor que D esteja na n -ésima parte, ou seja, entre o $(n-1)$ -ésimo e n -ésimo pontos de divisão. Traçando paralelas ao feixe, vemos que a mesma se verifica na outra transversal. Podemos, então, escrever

$$(n-1)u < CD < nu \quad \text{e} \quad (n-1)u' < C'D' < nu'$$

Dividindo a primeira por mu e a segunda por mu' ,

$$\frac{n-1}{m} < \frac{CD}{AB} < \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad \frac{n-1}{m} < \frac{C'D'}{A'B'} < \frac{n}{m}$$

ou

$$\frac{m}{n-1} > \frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n-1} > \frac{A'B'}{C'D'} > \frac{m}{n}$$

se $n \rightarrow \infty$, $n-1 \sim n$, $\frac{m}{n-1} \rightarrow \frac{m}{n}$ e, então, $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ ou ainda

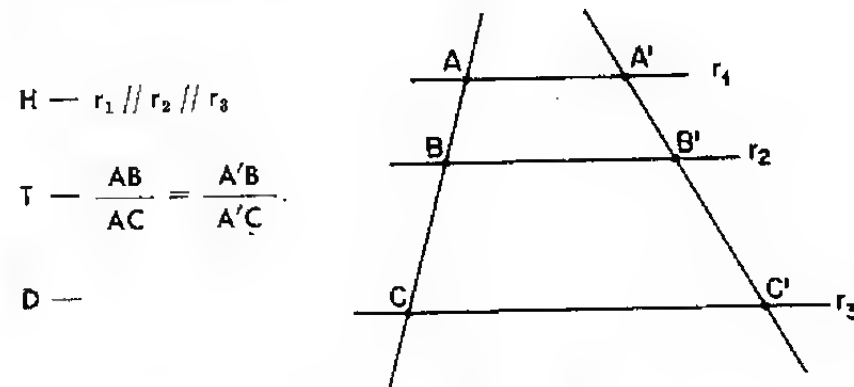
$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}}$$

Analogamente, podemos escrever

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \dots = \frac{u}{u'}}$$

2.3 — OBSERVAÇÃO

As razões homólogas são iguais em secantes atravessadas por feixe de paralelas.



$$H \text{ --- } r_1 // r_2 // r_3$$

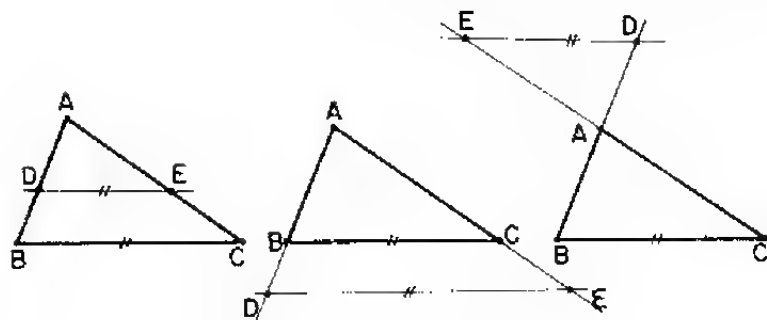
$$T \text{ --- } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$D \text{ --- }$$

$$\text{De fato, } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \implies \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

2.4 — APLICAÇÃO NO TRIÂNGULO

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina nas outras dois segmentos proporcionais e reciprocamente.



$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

2.5 — TEOREMA

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro de lados respectivamente proporcionais ao primeiro.

H — $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$$T — \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

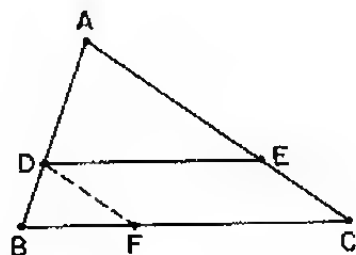
D — Considerando 2.4, temos

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{ mas, sendo } \overline{DF} \parallel \overline{AC}, \text{ temos}$$

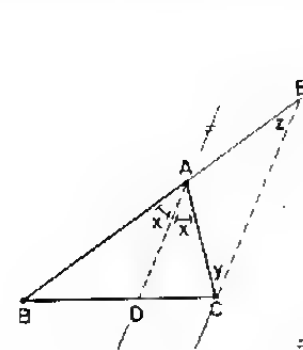
$$\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{DE}{BC} \quad \text{ou}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



2.6 — TEOREMA DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interno e externa de um triângulo dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.



Demonstração

Seja AD o bissetriz interna do ângulo \hat{A} .

Trocemos \overline{CE} paralelo a \overline{AD} .

Temos

$$\hat{x} = \hat{z} \quad (\text{correspond.})$$

$$\hat{x} = \hat{y} \quad (\text{alt. int.})$$

$$\hat{y} = \hat{z}.$$

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Consideremos a bissetriz da ângulo externo \hat{A} ($\overline{AD'}$).

Trocemos \overline{CE} paralelo a $\overline{AD'}$. Temos

$$\hat{x} = \hat{z}$$

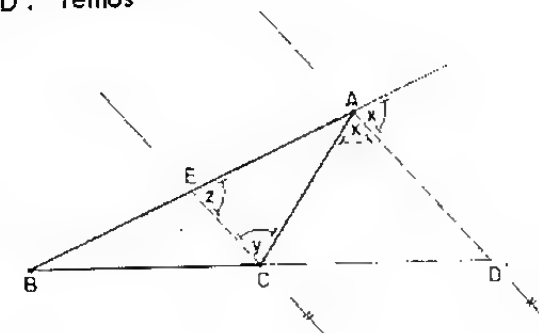
$$\hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{y} = \hat{z}.$$

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

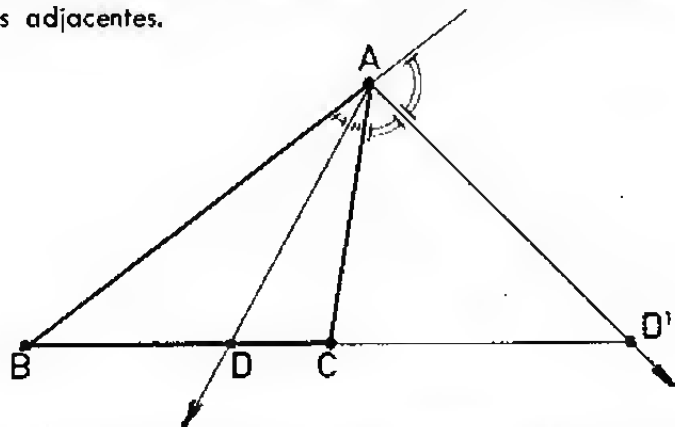
$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$



2.7 — DIVISÃO HARMÔNICA PELOS PÉS DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice de um triângulo dividem harmonicamente o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes.



Seja $k = \frac{AB}{AC}$ razão dos lados que concorrem em A. Do teorema das bissetrizes, temos

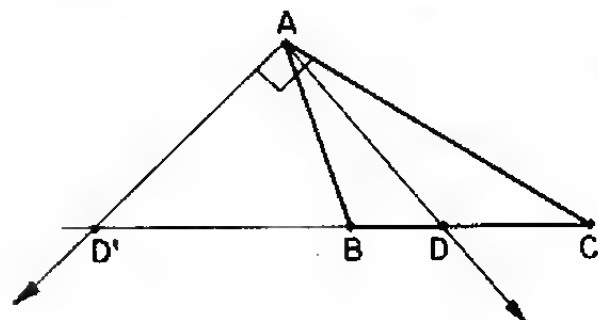
$$\frac{DB}{DC} = k$$

$$\frac{D'B}{D'C} = k$$

$$\Downarrow$$

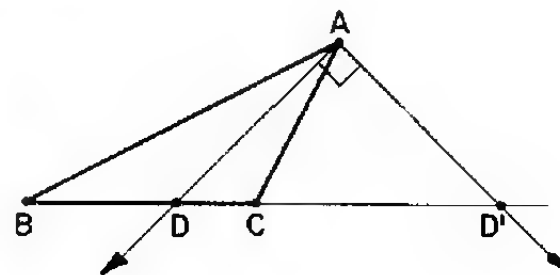
$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$$

O que mostra que D e D' dividem harmonicamente o lado \overline{BC} .

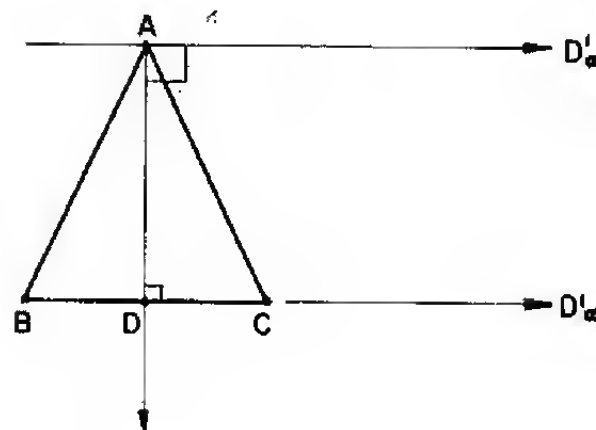


$$k = \frac{AB}{AC}$$

$$0 < k < 1$$



$$k > 1$$



$$k = 1$$

Para os casos I e II, podemos escrever

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

Assim,

$$DB = \frac{ac}{b+c} \quad e$$

$$DC = \frac{ab}{b+c}$$

e, análogamente,

$$D'B = \frac{ac}{|b - c|} \quad e$$

$$D'C = \frac{ab}{|b - c|}$$

2.8 — DIVISÃO DA BISSETRIZ INTERNA, HARMONICAMENTE, PELO INCENTRO E EXCENTRO

No triângulo ABC , BI e BI_a são bissetrizes interno e externo de B , dividindo AI harmonicamente.

A razão da divisão harmônica será

$$k = \frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD}, \text{ mas}$$

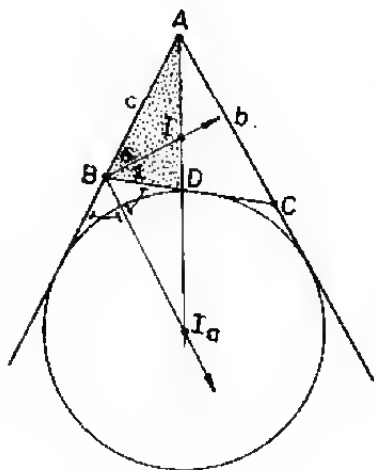
$$BA = c \text{ e } BD = \frac{ac}{b + c}.$$

Então,

$$k = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \Rightarrow$$

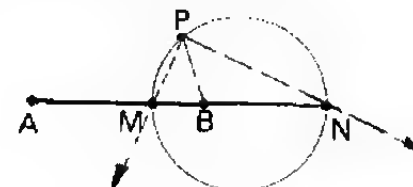
$$k = \frac{b + c}{a}$$

e, análogamente, para as outras bissetrizes.



2.9 — CÍRCULO DE APOLONIUS

É o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão PA/PB é igual a k , sendo k constante e A e B pontos fixos.



Conhecemos os pontos M e N pertencentes ao lugar que são os pontos que dividem o segmento AB internamente e externamente na razão k .

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Seja P um ponto qualquer do lugar.

$$\text{Como } \frac{PA}{PB} = k,$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{MA}{MB}.$$

Logo, PM é bissetriz interna do triângulo PAB . Do mesmo modo,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}.$$

Portanto, PN é bissetriz externa do ângulo \widehat{P} do triângulo PAB .

Como PM e PN são perpendiculares e os pontos M e N são fixos, o lugar geométrico de todos os pontos P é o círculo de diâmetro MN , sendo M e N as conjugadas harmônicas do segmento AB na razão k .

2.10 — RAIO DO CÍRCULO DE APOLONIUS

O diâmetro do círculo de Apolônio é a distância entre as conjugadas harmônicas do segmento AB de comprimento l na razão $k > 0, k \neq 1$.

Por 1.10 concluímos que a raio do círculo de Apolônio é dado por

$$r = \frac{kl}{|k^2 - 1|}$$

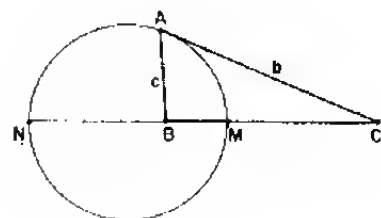
Em um triângulo de lados a , b e c , teríamos

$$l = a$$

$$k = \frac{c}{b} \quad \text{Logo,}$$

$$r = \frac{\frac{c}{b} \cdot a}{\frac{c^2}{b^2} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}$$



2.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

21. Considere sobre uma reta quatro segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} de comprimentos respectivamente iguais a 8, 10, 12 e 15. Considere numa outra reta as segmentos \overline{MN} , \overline{NP} , \overline{PQ} e \overline{QR} proporcionais as primeiras. Se $MN = 10$, calcule NP , PQ e QR .

Solução

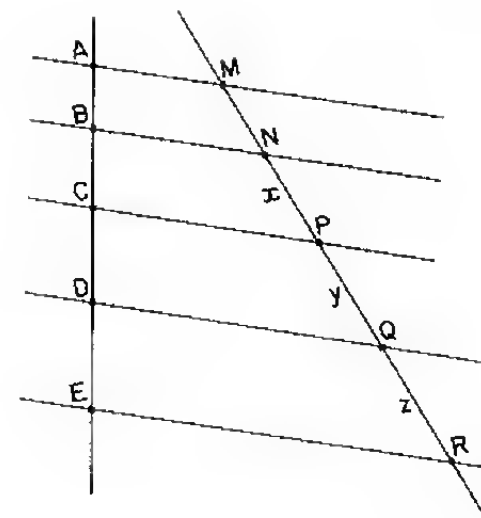
$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DE}{QR}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} = \frac{12}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 12,5$$

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{y} \Rightarrow y = 15$$

$$\frac{8}{10} = \frac{15}{z} \Rightarrow z = 18,75.$$



Respostas: $NP = 12,5$
 $PQ = 15$
 $QR = 18,75.$

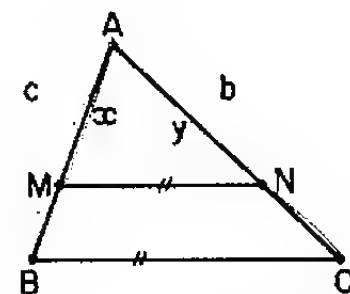
22. No triângulo ABC da figura $AB = c$ e $AC = b$. Se $AM = x$ e $MN \parallel BC$, calcule AN .

Solução

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Rightarrow$$

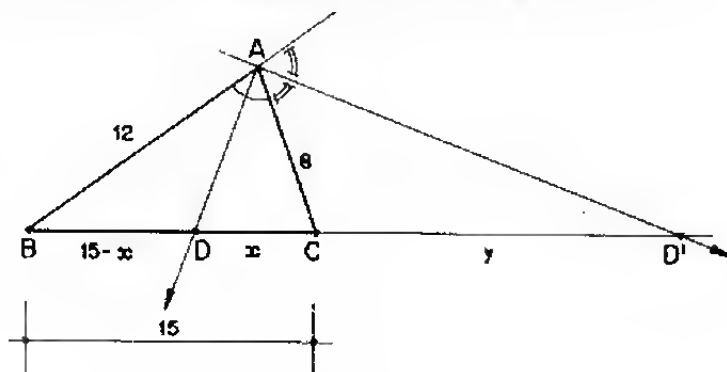
$$\Rightarrow y = \frac{bx}{c}$$



Resposta: $AN = \frac{bx}{c}$

23. Considere um triângulo ABC de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 15$. As bissetrizes interna e externa de \hat{A} encontram o lado oposto em D e D'. Calcule DB, DC, D'B e D'C.

Solução



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{15-x}{x} = \frac{12}{8} \Rightarrow x = 6$$

$$DC = 6 \text{ e } DB = 15 - 6 = 9.$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{y+15}{y} = \frac{12}{8} \Rightarrow y = 30$$

$$D'C = 30 \text{ e } D'B = 30 + 15 = 45.$$

Respostas: $DB = 9$, $DC = 6$
 $D'B = 45$, $D'C = 30$.

24. Em um triângulo ABC, $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{4}$. A bissetriz externa de C encontra a reta suporte de \overline{AB} em P (A entre P e B). A razão $\frac{PA}{AB}$ é:

- A) $1/3$
 B) $3/4$
 C) $4/3$
 D) $3/1$
 E) $7/1$

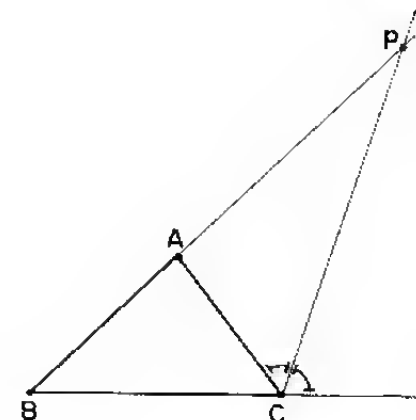
Solução

Pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{PB}{PA} = \frac{CB}{CA} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{PB - PA}{PA} = \frac{4 - 3}{3}$$

$$\frac{AB}{PA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PA}{AB} = 3$$



Resposta: D.

25. Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa de \hat{B} encontram o lado oposto em M e N. Se $AC = 20$, $AB = 16$ e $AN = 10$, calcule CB e BN.

Solução

Como os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica, poderemos aplicar, por exemplo, a relação encontrada em $1 \cdot 8 = 1.^\circ$ caso.

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \Rightarrow \frac{2}{16} = \frac{1}{10} = \frac{1}{AN}$$

$$\frac{1}{AN} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \Rightarrow AN = 40 \Rightarrow BN =$$

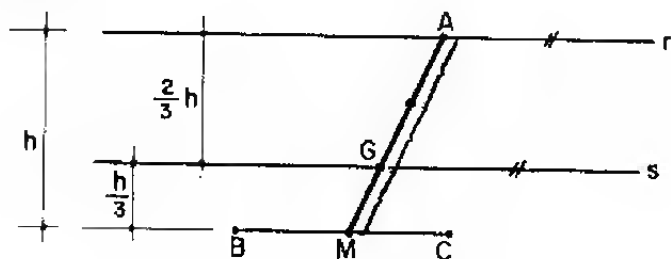
$40 - 16 = 24$. Como $MB = 6$, temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{20}{CB} \Rightarrow CB = 12$$

Respostas: $CB = 12$, $BN = 2$

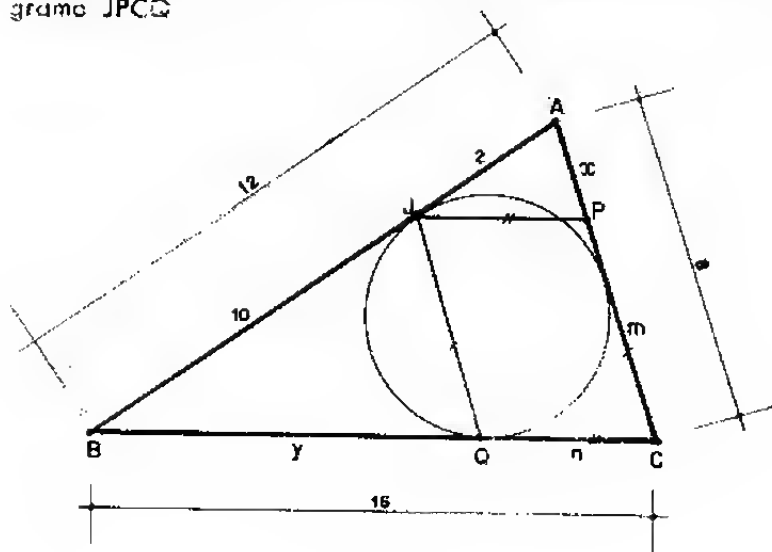
26. Em um triângulo ABC, a base \overline{BC} é fixa e o ponto A percorre uma reta r paralela a BC. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

Solução



Porque $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, o lugar geométrico do ponto G é uma reta s paralela a r (s entre r e BC), distando $\frac{h}{3}$ de BC.

27. Em um triângulo ABC, $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 16$. O círculo inscrito é tangente ao lado \overline{AB} em J. Se \overline{JP} e \overline{JQ} são paralelos a \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, calcule o perímetro do paralelogramo JPCQ.



Solução

O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \frac{12 + 8 + 16}{2} = 18$.

$AJ = p - a = 18 - 16 = 2$. Seja $AP = x$. Como $\overline{JP} \parallel \overline{BC}$,

$$\frac{2}{x} = \frac{12}{8} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow m = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

$8J = p - b = 18 - 8 = 10$. Seja $BQ = y$. Como $\overline{JQ} \parallel \overline{AC}$,

$$\frac{10}{y} = \frac{12}{16} \Rightarrow y = \frac{40}{3} \Rightarrow n = 16 - \frac{40}{3} = \frac{8}{3}$$

O perímetro do paralelogramo JPCQ será

$$(2p)_{JPCQ} = 2(m + n) = 2\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3}$$

Resposta: $\frac{56}{3}$

28. Calcule o raio do círculo de Apolônio construído sobre o segmento \overline{AB} de 21 cm na razão $\frac{5}{2}$.

Solução

$$l = 21$$

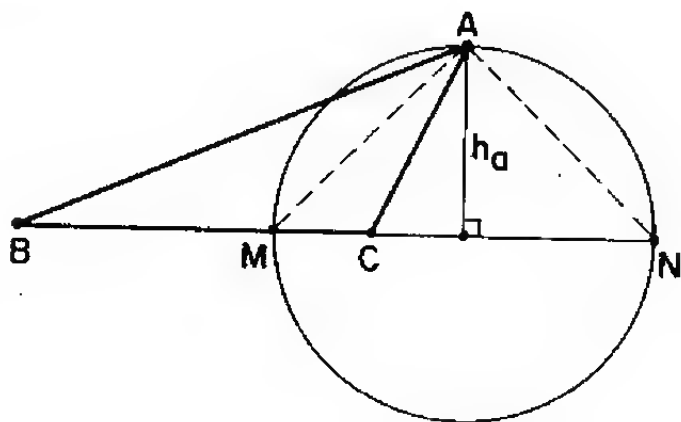
$$k = \frac{5}{2}$$

$$\text{Por 2.10, } r = \frac{kl}{|k^2 - 1|} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 21}{\frac{25}{4} - 1} = 10$$

Resposta: $r = 10$ cm

29. Em um triângulo ABC, $BC = 12$ e $\frac{AB}{AC} = 2$, calcule o valor da altura relativa ao lado a , sabendo que ela é máxima.

Solução



Se $\frac{AB}{AC} = 2$, a vértice A pertence ao círculo de Apolônio construído sobre BC na razão 2. Se h_a é máxima, seu valor é igual ao raio do círculo de Apolônio.

$$l = 12$$

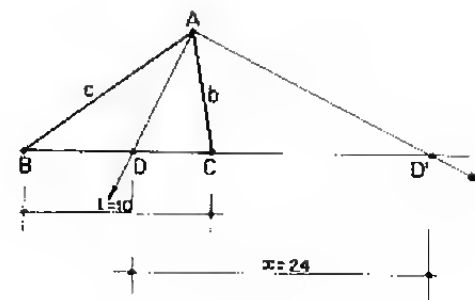
$$k = 2$$

$$h_a = r = \frac{kl}{|k^2 - 1|} = \frac{2 \cdot 12}{2^2 - 1} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$$

Resposta: $h_a = 8$

- 29-A. Em um triângulo ABC, de perímetro 30, o lado BC mede 10 e a distância entre as pés das bissetrizes que partem de A é igual a 24. Calcule os lados AB e AC do triângulo.

1.ª Solução



Calcularemos a razão da divisão harmônica $k = \frac{c}{b}$.

Por 1.10,

$$x = \frac{2kl}{k^2 - 1} \Rightarrow 24 = \frac{2 \cdot k \cdot 10}{k^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6k^2 - 5k - 6 = 0 \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \text{ (não serve)} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

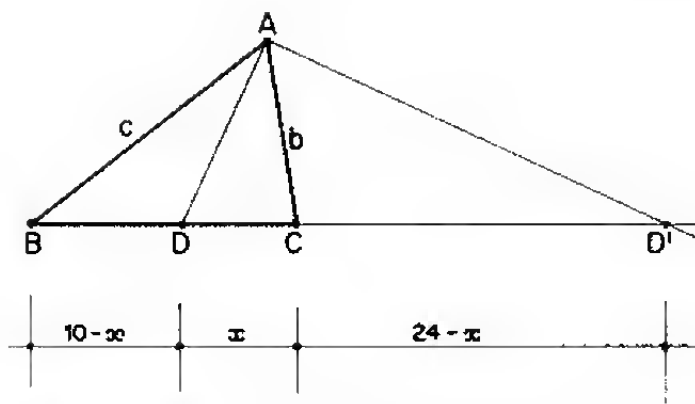
$$a + b + c = 30, \quad a = l = 10 \Rightarrow b + c = 20$$

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{b+c}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{20}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = 12$$

2.ª Solução

Chegaremos a idêntica resultada a partir da definição de divisão harmônica sem necessidade de aplicação de fórmulas.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{10 - x}{x} = \frac{34 - x}{24 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10 - x)(24 - x) = x(34 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 240 - 10x - 24x + x^2 = 34x - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \quad \begin{cases} x = 30 \text{ (não serve)} \\ x = 4 \end{cases}$$

Então, $DC = 4$ e $DB = 6$. Como $b + c = 20$, temos

$$\frac{c}{6} = \frac{b}{4} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{c}{6} = 2 \Rightarrow c = 12$$

$$\frac{b}{4} = 2 \Rightarrow b = 8$$

Resposta: $AB = 12$
 $AC = 6$

PROBLEMAS PROPOSTOS

30. O valor de x na figura é:

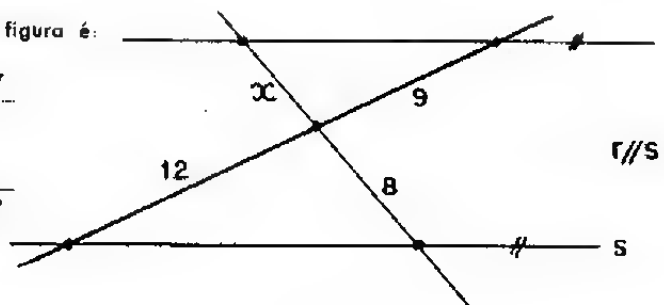
A) $\frac{27}{2}$

B) $\frac{2}{27}$

C) 6

D) 4

E) NRA.



31. Em um triângulo ABC, de lados $AB = 9$, $AC = 12$ e $BC = 15$, traça-se \overline{DE} paralela a \overline{BC} passando pelo baricentro do triângulo (D em \overline{AB} e E em \overline{AC}). O perímetro do triângulo ADE é:

A) 12

C) 20

B) 18

D) 24

E) NRA.

32. Em um triângulo ABC de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, o maior segmento que a bissetriz interna de \hat{A} determina sobre BC é:

A) 4

C) 6

B) 5,5

D) 7,5

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 33 E 34.

Em um triângulo ABC de lados $AB = 15$, $AC = 6$ e $BC = 14$, seja I o ponto de concursa das bissetrizes internas AD e BE.

33. A razão $\frac{IA}{ID}$ vale:

A) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{7}{3}$

E) NRA.

34. A razão $\frac{IE}{IB}$ vale:

A) $\frac{6}{29}$

C) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{29}{6}$

D) 6

E) NRA.

35. Em um triângulo ABC de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, a bissetriz interna de \widehat{B} encontra a bissetriz \overline{AN} externa de \widehat{A} no ponto F. A razão $\frac{FN}{FA}$ vale:

A) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

36. Em um triângulo ABC, $BC = a$ e $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$, calcule o comprimento da altura relativa ao lado a sabendo que ela é máxima.

A) $h_a = a$

C) $h_a = \frac{5}{4} a$

B) $h_a = \frac{3}{2} a$

D) $h_a = \frac{5}{3} a$

E) $h_a = \frac{6}{5} a$

37. Em um triângulo ABC, $BC = 16$ e $h_a = 8$, calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

A) 2

C) $\frac{3}{2}$

B) 3

D) $\frac{4}{3}$

E) NRA.

38. Os lados do triângulo ABC medem $AB = 6$, $AC = 9$ e $BC = 11$. Se J é a ponta de tangência da circulo exscrito relativa ao lado c com o lado \overline{AB} e se \overline{JL} é paralelo a BC, então AL vale:

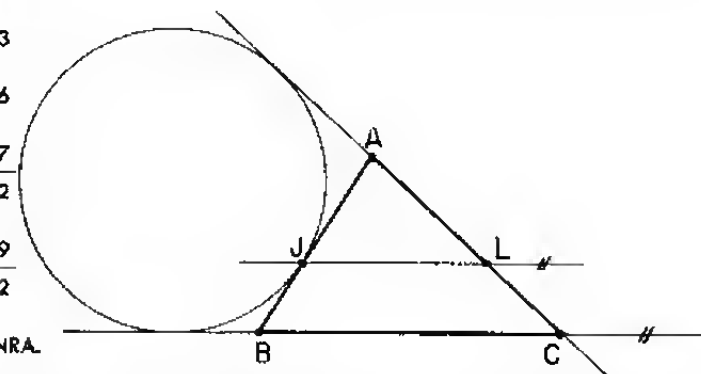
A) 3

B) 6

D) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) NRA.



39. Considere em um círculo de centro O um diâmetro AB. Prolongue uma corda AP qualquer da circula de um comprimento $PQ = AP$. \overline{QO} e \overline{BP} cortam-se em J. Calcule a razão $\frac{JQ}{JO}$.

A) 3

C) 2

B) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

40. Considere os quadrados ABCD e ABEF da figura. Se $FG = 12$ e $GH = 4$, calcule HC.

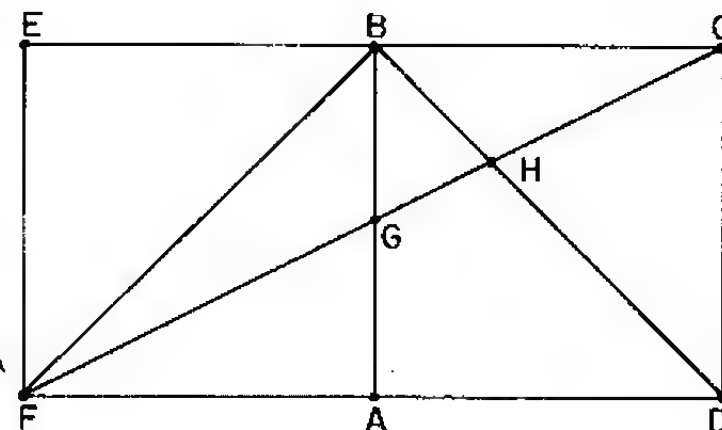
A) 9

B) 8

C) 6

D) 5

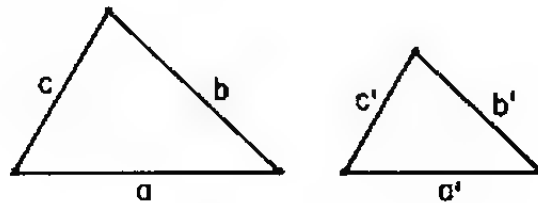
E) NRA



CAPÍTULO 3

3.1 — TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Se dois triângulos possuem lados respectivamente proporcionais, então são "semelhantes".



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

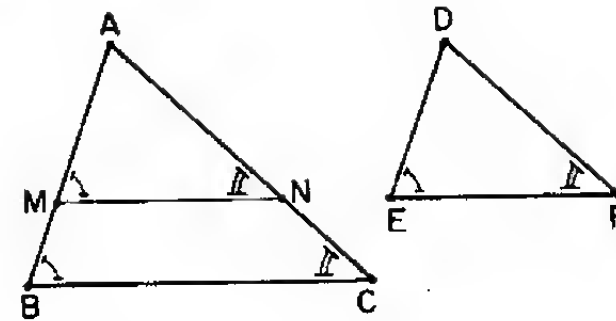
3.2 — TEOREMA

Dois triângulos que possuem seus ângulos respectivamente congruentes são semelhantes.

De fato, em 2.5 as triângulos ADE e ABC possuem mesmas ângulos internos e mostramos que seus lados são respectivamente proporcionais.

3.3 — RECÍPROCA

Se dois triângulos são semelhantes, seus ângulos internos são respectivamente congruentes.



$$H - \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$T - \hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{C} = \hat{F}.$$

D — Seja $\triangle AMN$ por construção, tal que

$$AM = DE \text{ e } \overline{MN} \parallel \overline{BC}.$$

De 2.5, temos

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Como $AM = DE$,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}. \quad (1)$$

Mas, por hipótese,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}. \quad (2)$$

Par (1) e (2), $\triangle AMN$ e $\triangle DEF$ são congruentes e

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{M} = \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{N} = \hat{C} = \hat{F}$$

C. Q. D.

3.4 — CONCLUSÃO

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos,

$$\begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \right]$$

k é chamado razão de semelhança dos dois triângulos.

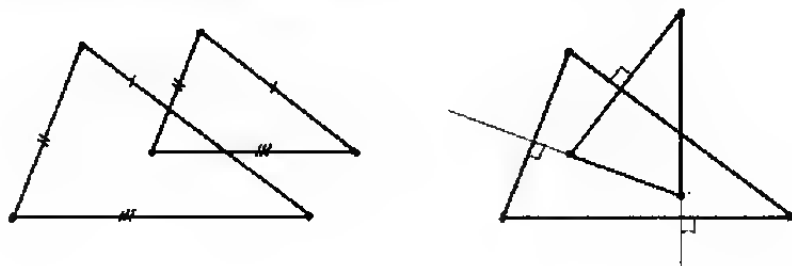
Da relação acima conclui-se que a razão entre os perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança, ou seja,

$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = k \Rightarrow$$

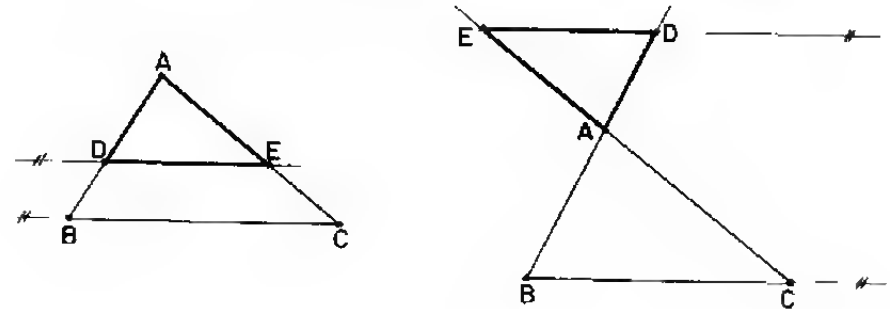
$$\frac{(2p)_{ABC}}{(2p)_{A'B'C'}} = k.$$

3.5 — OBSERVAÇÕES

a) Dois triângulos de lados respectivamente paralelos ou perpendiculares são semelhantes.



b) Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro semelhante ao primeiro

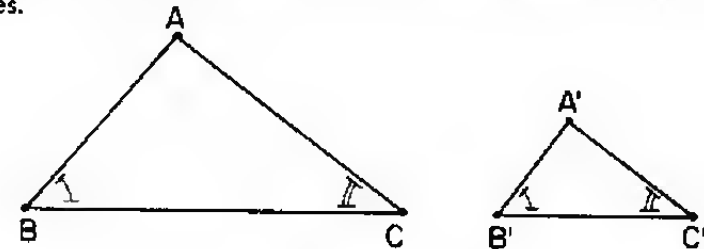


$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

3.6 — CASOS CLÁSSICOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1.º caso

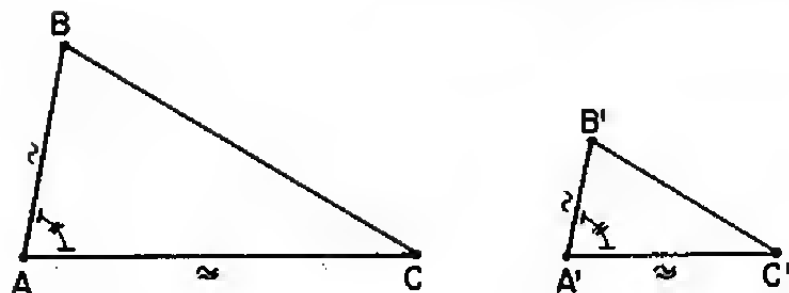
Se dois ângulos de um triângulo $A'B'C'$ são respectivamente congruentes o dois ângulos de um triângulo ABC , esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{bmatrix} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \end{bmatrix}$$

2.º caso

Se dois lados de um triângulo $A'B'C'$ são respectivamente proporcionais o dois lados de um triângulo ABC e se forem congruentes os ângulos formados por esses lados, os triângulos são semelhantes.



$$\left[\begin{array}{l} \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right] \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{a}{a'} = k \end{array} \right]$$

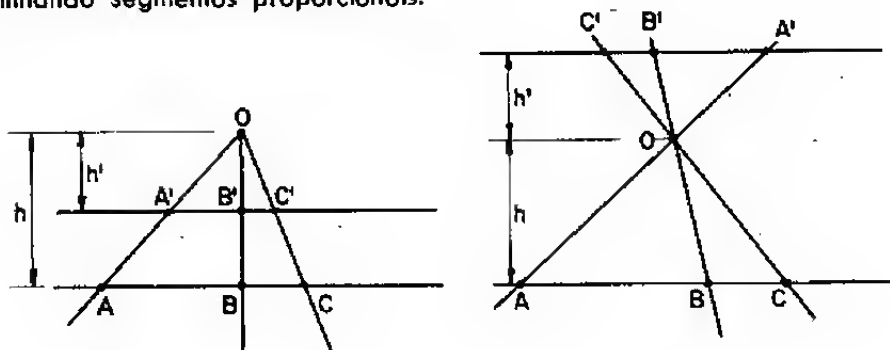
3.º caso

Se os três lados de um triângulo $A'B'C'$ são respectivamente proporcionais aos três lados de um triângulo ABC , esses triângulos são semelhantes.

$$\left[\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \right] \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right]$$

3.7 — FEIXE DE RETAS CONCORRENTES

Um par de paralelas intercepta um feixe de concorrentes, determinando segmentos proporcionais.



Da semelhança dos triângulos $OA'B'$ e OAB , $OB'C'$ e OBC temos, por 8.5, a) e b)

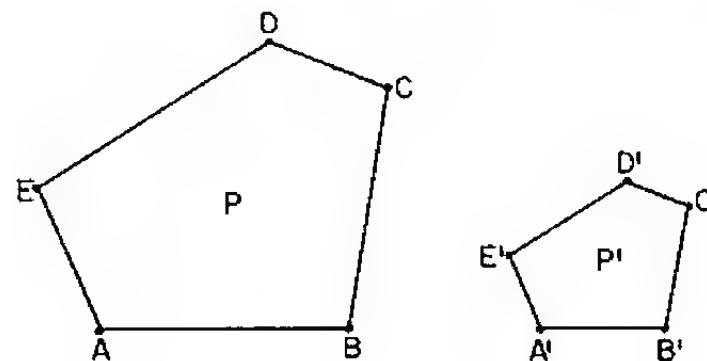
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \dots = \frac{h'}{h}$$

Verificamos também que da semelhança desses mesmos triângulos os segmentos homólogos determinados nos paralelos são proporcionais, ou seja,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \dots = \frac{h'}{h}$$

3.8 — POLÍGONOS SEMELHANTES

3.8.1 — Dois polígonos são semelhantes se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados que formam ângulos congruentes forem proporcionais.



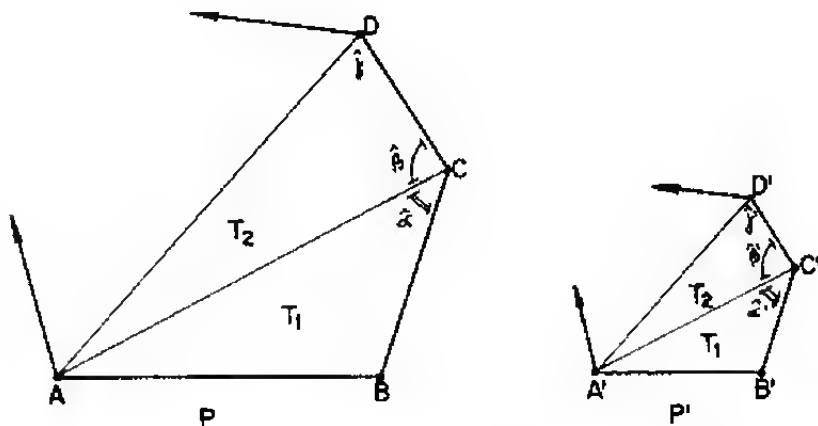
$$P \sim P' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \vdots \\ e \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = k \end{array} \right.$$

3.B.2 — A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Da proporcionalidade dos lados homólogos conclui-se imediatamente

$$\frac{(2p)_P}{(2p)_{P'}} = k$$

3.B.3 — Dois polígonos semelhantes podem ser divididos em igual número de triângulos ordenadamente semelhantes.



Nos dois polígonos tracemos todas as diagonais possíveis por A e A', dividindo cada polígono em $n - 2$ triângulos ($n =$ gênera).

H — $P \sim P'$ (com as implicações de 3.8)

T — $T_1 \sim T_1'$

$T_2 \sim T_2'$

etc.

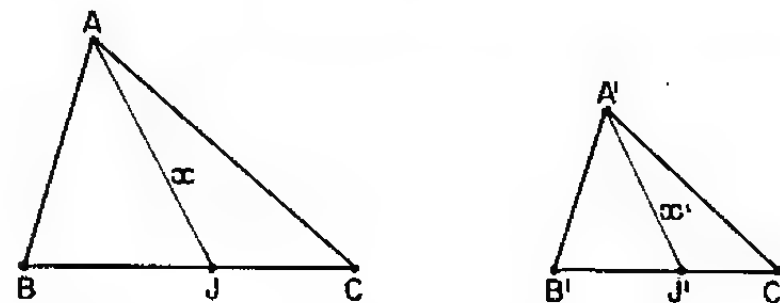
$$D - \left[\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k \end{array} \right] \Rightarrow T_1 \sim T_1' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}' \\ \frac{AC}{A'C'} = k \end{array} \right] \quad (2.^\circ \text{ caso})$$

mas, se $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$, então $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}'$ e, então, temos

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{\beta} = \widehat{\beta}' \\ \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k \end{array} \right] \Rightarrow T_2 \sim T_2' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}' \\ \frac{AD}{AD'} = k \end{array} \right] \quad (2.^\circ \text{ caso})$$

e assim sucessivamente, ficando provada o Teorema.

3.8.4 — Em quaisquer polígonos semelhantes a razão de duas linhas homólogas é igual à razão de semelhança.



Sejam dois triângulos ABC e A'B'C' semelhantes na razão k. Sejam J e J' pontos que dividem BC e B'C' na mesma razão m. Vamos provar que x e x' guardam mesma razão k.

$$H - \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = k$$

$$\frac{JB}{JC} = m$$

$$\frac{J'B'}{J'C'} = m$$

$$T - \frac{x}{x'} = k.$$

$$D - \frac{JB}{JC} = m$$

$$\frac{J'B'}{J'C'} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{JB + JC}{JB} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{J'B' + J'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{B'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

dividindo membro o membro,

$$\frac{\frac{BC}{JB}}{\frac{B'C'}{J'B'}} = 1$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{B'C'}{J'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{JB}{J'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

Assim, os triângulos ABJ e $A'B'J'$ são semelhantes na razão k e, então,

$$\boxed{\frac{x}{x'} = k.}$$

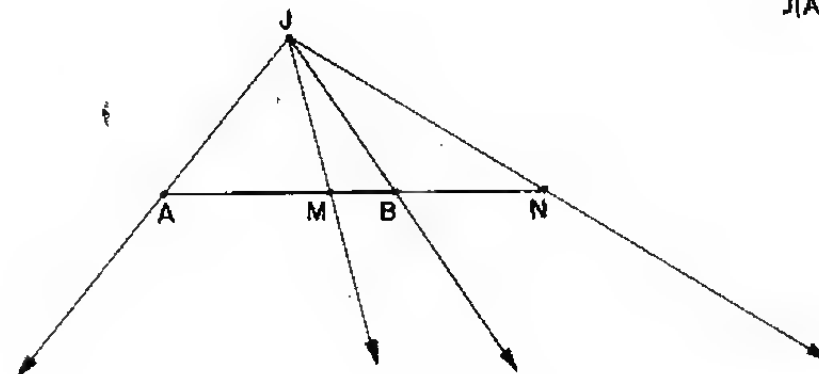
Assim, a razão de semelhança de dois triângulos é igual

- à razão entre dois lados homólogos,
- à razão entre os perímetros,
- à razão entre duas medianas homólogas,
- à razão entre duas alturas homólogas etc.

3.9 — FEIXE HARMÔNICO

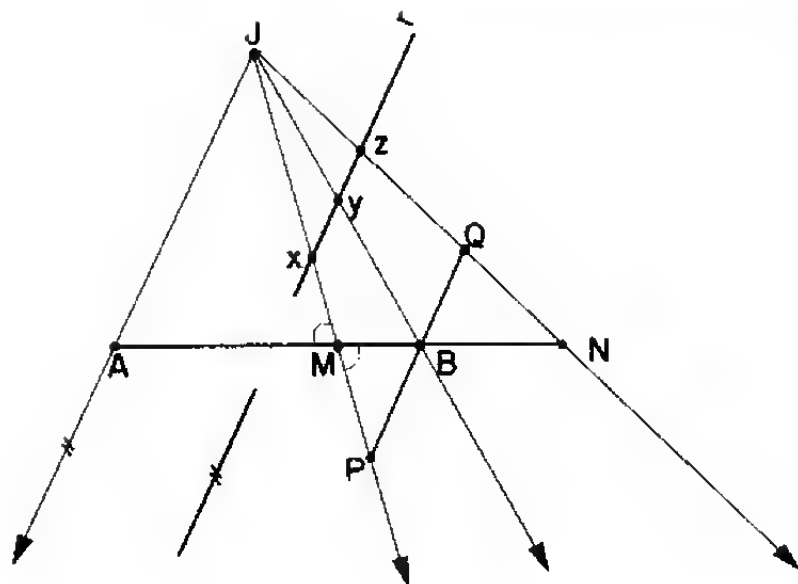
3.9.1 — Se os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica e se J é um ponto não pertencente à reta que os contém, JA, JM, JB e JN formam um feixe harmônico.

Notação:
 $J(AMBN)$



3.9.2 — Teorema

Se uma reta é paralela a um dos raios de um feixe harmônico, os outros três raios determinam segmentos congruentes e reciprocamente.



Consideremos um feixe harmônica $J(AMBN)$ e uma reta r paralela a JA determinando as segmentas xy e yz , que mostraremos serem congruentes.

Seja PBQ paralela a r .

$$\Delta JMA \sim \Delta PMB \implies \frac{JA}{PB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

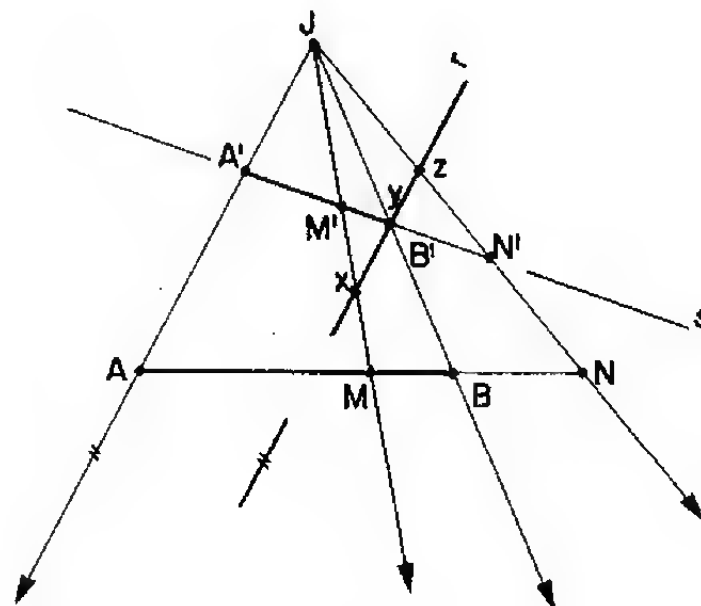
$$\Delta NJA \sim \Delta NBQ \implies \frac{JA}{BQ} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Daí conclui-se que $PB = BQ$ e que

$$xy = yz.$$

3.9.3 — Teorema

Um feixe harmônica determina em qualquer secante quatro pontos em divisão harmônica.

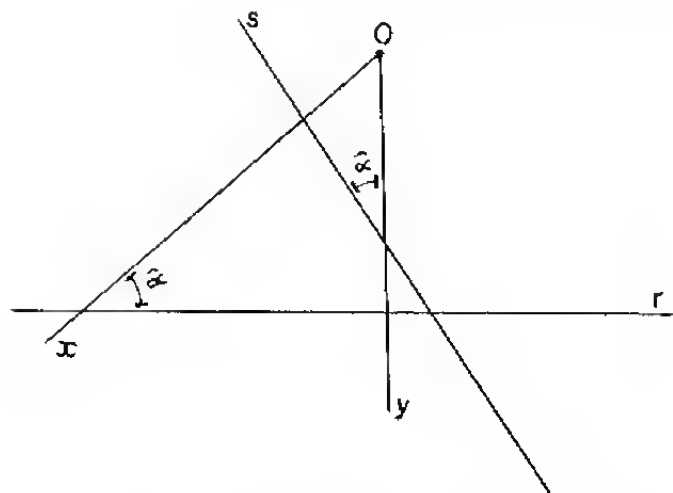


Seja $J(AMBN)$ um feixe harmônico e uma secante s que determina os pontos A' , M' , B' e N' .

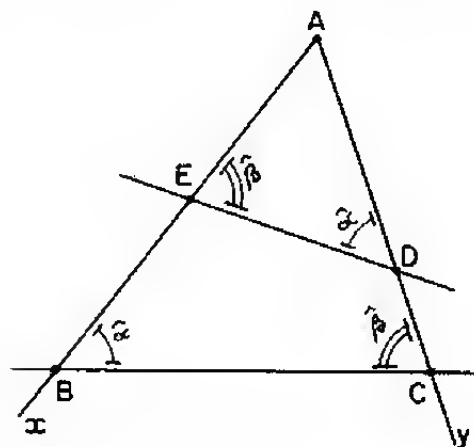
Ora, se $r \parallel JA'$ determina $xy = yz$ (pois $J-AMBN$ é feixe harmônica), então $J(A'M'B'N')$ é um feixe harmônica, sendo M' e N' conjugados harmônicos de $A'B'$.

3.10 — RETAS ANTIPARALELAS

3.10.1 — Seja um ângulo xOy . Se duas retas r e s são tais que o ângulo que r forma com Ox é o mesmo ângulo que s forma com Oy , as retas r e s são antiparalelas.



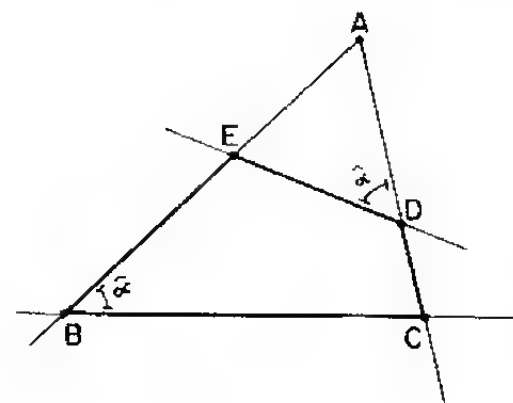
3.10.2 — Retas antiparalelas formam triângulos semelhantes.



Porque os triângulos ABC e ADE possuem ângulos internos congruentes, temos

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}} \quad \text{e} \quad \boxed{AD \cdot AC = AE \cdot AB} \quad \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}$$

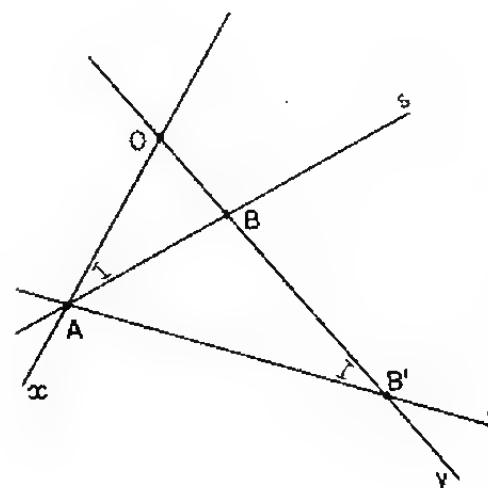
3.10.3 — Retas antiparalelas formam quadrilátero inscrito.



$$\begin{aligned} \widehat{B} &= \widehat{\alpha} \\ \widehat{D} &= 180^\circ - \widehat{\alpha} \implies \\ \implies B + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \text{BCDE é inscrito!} \end{aligned}$$

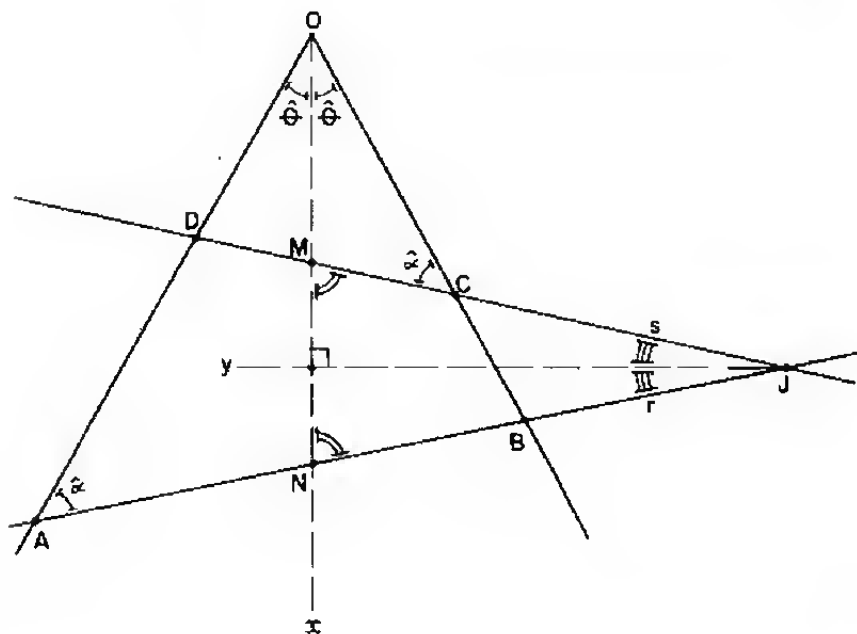
3.10.4 — Caso Particular

Se as retas r e s da figura são antiparalelas em relação a \widehat{O} , a relação 3.10.2 — II transforma-se em



$$\boxed{OA^2 = OB \cdot OB'}$$

3.10.5 — Se r e s são antiparalelas em relação a \widehat{O} , as bissetrizes de \widehat{O} e de (r, s) são perpendiculares.



$$\widehat{M} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta} \quad (\text{externo } \triangle OMC)$$

$$\widehat{N} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta} \quad (\text{externo } \triangle ONA)$$

Como $\widehat{M} = \widehat{N}$, o triângulo JMN é isósceles, sendo a bissetriz de \widehat{J} perpendicular à base MN . Assim,

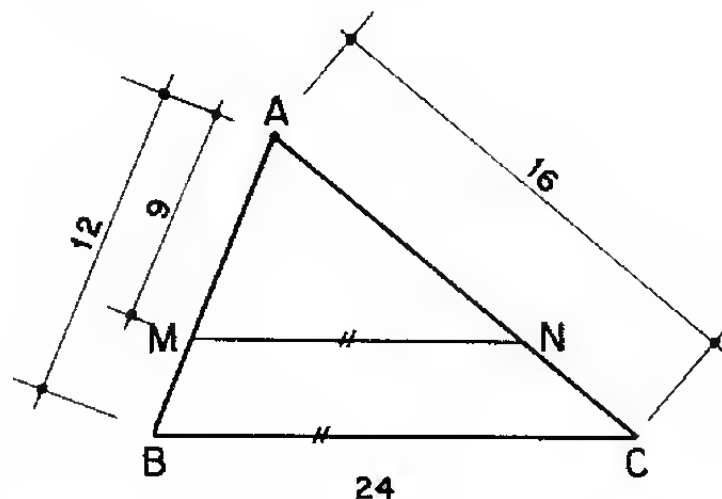
$$\boxed{Ox \perp Jy}$$

C. Q. D.

3.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

41. Os lados de um triângulo ABC são $AB = 12$, $AC = 16$ e $BC = 24$. Seja M da lada AB tal que $MA = 3 MB$. Traçando MN paralela a BC , calcule a perímetro do triângulo AMN .

Solução



$$MA + MB = 12, \quad MA = 3 MB$$

$$4 MB = 12, \quad MB = 3, \quad MA = 9.$$

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC.$$

$$\text{Razão de semelhança } k = \frac{AM}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{(2p)_{ABC}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{12 + 16 + 24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{52} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2p)_{AMN} = 39$$

Resposta: 39.

42. Considere o triângulo ABC, de lados a , b e c , e seu baricentro G. Traçam-se \overline{GE} e \overline{GF} paralelas a \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente. Calcule as lados do triângulo GEF.

Solução

$$\triangle GEF \sim \triangle ABC$$

$$k = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

Então,

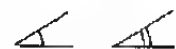
$$EF = \frac{a}{3}, GF = \frac{b}{3} \text{ e } GE = \frac{c}{3}$$

Resposta: $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ e $\frac{c}{3}$.

43. Em um triângulo ABC, considere as alturas $\overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$. Se $AB = 8$, $AC = 12$ e $AH_2 = 2$, calcule AH_3 .

Solução

$$\triangle AH_2H_3 \sim \triangle ABC$$

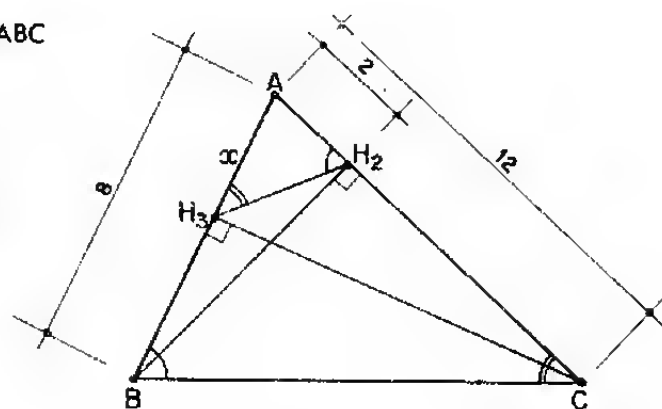


$$\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{12}$$

$$x = 3$$

Resposta: 3.



44. Calcule x na figura

Solução

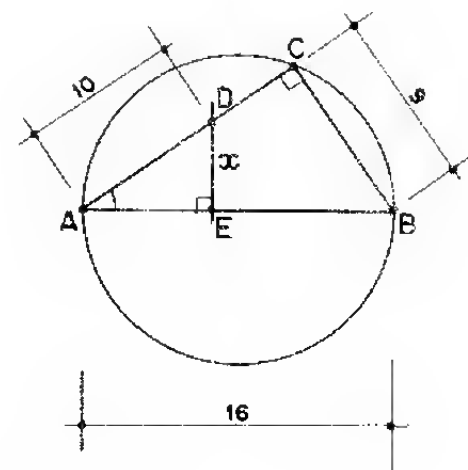
$$\triangle AED \sim \triangle ACB$$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{10}{16} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 5,625$$

Resposta: $x = 5,625$.



45. Na figura abaixo, ADEF é um losango, $AB = 12$ e $AC = 6$. Calcule a lado desse losango.

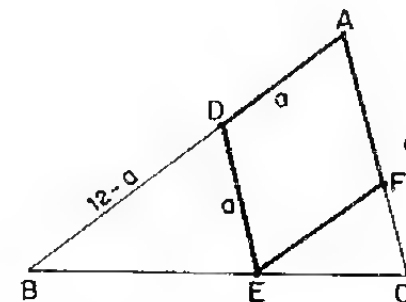
Solução

$$\triangle BDE \sim \triangle BAC$$

$$\frac{a}{6} = \frac{12 - a}{12}$$

$$12a = 6(12 - a) \Rightarrow$$

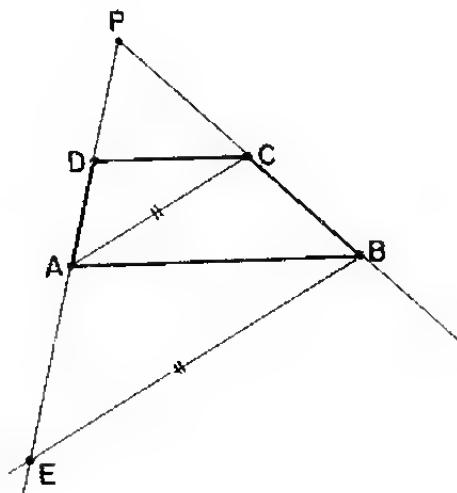
$$\Rightarrow a = 4$$



Resposta: 4.

46. Em um trapézio de bases \overline{AB} e \overline{CD} , traça-se por B uma paralela à diagonal \overline{AC} que encontra o prolongamento de \overline{AD} em E. Sendo P o ponto de concurso dos lados \overline{AD} e \overline{BC} , prove que PA é média geométrica entre PD e PE.

Solução



$$\left. \begin{aligned} \triangle PDC \sim \triangle PAB & \Rightarrow \frac{PD}{PA} = \frac{PC}{PB} \\ \triangle PAC \sim \triangle PEB & \Rightarrow \frac{PA}{PE} = \frac{PC}{PB} \end{aligned} \right\} \frac{PD}{PA} = \frac{PA}{PE} \Rightarrow PA^2 = PD \cdot PE.$$

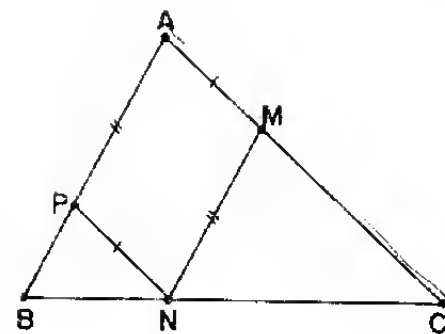
47. Em um triângulo ABC, toma-se um ponto M qualquer de \overline{AC} . Traçam-se \overline{MN} paralelo a \overline{AB} e \overline{NP} paralelo a \overline{AC} . Prove que

$$\frac{AP}{AB} + \frac{AM}{AC} = 1.$$

Solução

$$\triangle CMN \sim \triangle CAB$$

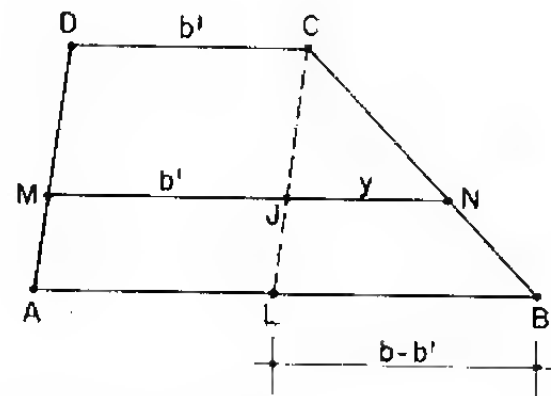
$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AC - AM}{AC}$$



$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AC} - \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{AP}{AB} + \frac{AM}{AC} = 1.$$

40. Em um trapézio de bases $AB = b$ e $CD = b'$, considere um ponto M do lado AD tal que $\frac{MA}{MD} = k$. Calcule o comprimento do segmento MN paralelo às bases do trapézio.

Solução



$$\frac{MA}{MD} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{x}{x+kx} = \frac{1}{k+1} = \frac{CJ}{CL}$$

$$\text{Seja } MN = b' + y$$

$$\Delta CJN \sim \Delta CLB$$

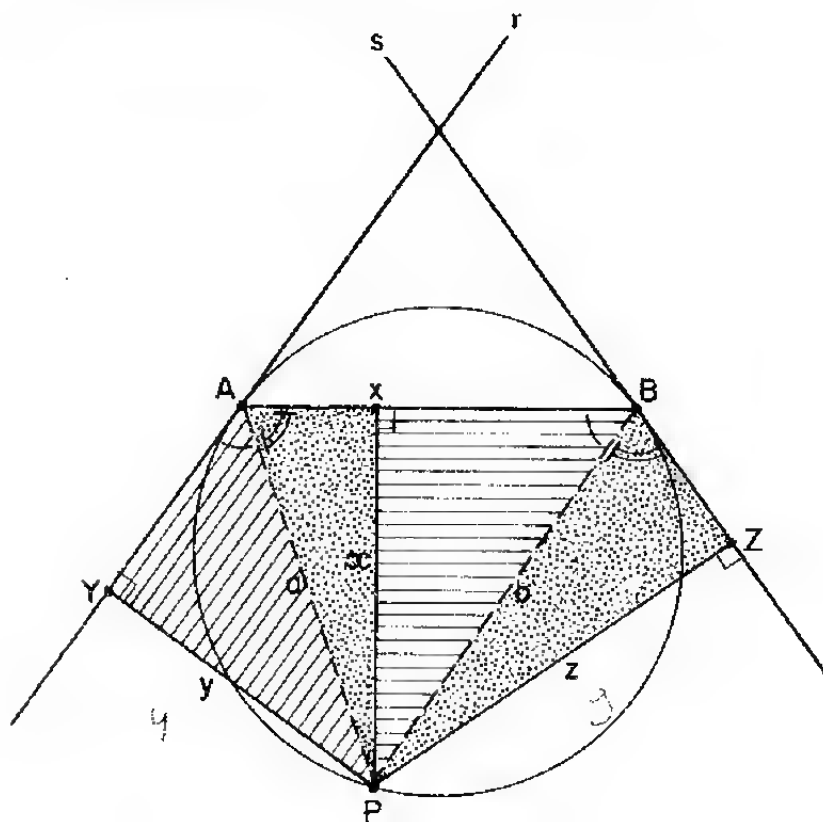
$$\frac{y}{b-b'} = \frac{CJ}{CL} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow y = \frac{b-b'}{k+1}$$

$$MN = b' + \frac{b-b'}{k+1}$$

$$MN = \frac{b'k + b' + b - b'}{k+1} = \frac{b + b'k}{k+1}$$

$$\text{Resposta: } \frac{b + b'k}{k+1}$$

49. Na figura, r e s são tangentes em A e B ao círculo. Por um ponto P do maior arco AB , traçam-se Px , Py e Pz perpendiculares a AB , r e s , respectivamente. Se $Py = 4$ e $Pz = 9$, calcule Px .



Solução

$$\widehat{YAP} = \widehat{XBP} = \frac{\widehat{AP}}{2} \Rightarrow \Delta YAP \sim \Delta XBP \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\widehat{XAP} = \widehat{ZBP} = \frac{\widehat{BP}}{2} \Rightarrow \Delta XAP \sim \Delta ZBP \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{z} \quad (2)$$

Por (1) e (2),

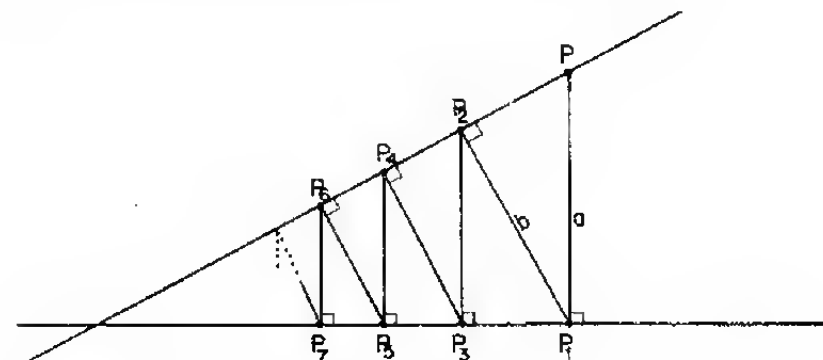
$$\frac{y}{x} = \frac{x}{z} \Rightarrow x^2 = yz. \text{ Como } y = 4 \text{ e } z = 9,$$

$$x^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$x = 6$$

Resposta: 6

50. Na figura abaixo, $PP_1 = a$ e $P_1P_2 = b$. Calcule o limite da soma $PP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots$



Solução

$$\Delta PP_1P_2 \sim \Delta P_1P_2P_3 \sim \Delta P_2P_3P_4 \sim \Delta P_3P_4P_5 \sim \dots$$

Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{P_2P_3} = \frac{P_2P_3}{P_3P_4} = \dots$$

$$\text{e } P_2P_3 = \frac{b^2}{a}, P_3P_4 = \frac{b^3}{a^2}, \dots, P_nP_{n+1} = \frac{b^n}{a^{n-1}}.$$

A soma dos segmentos será

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots = a \left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots \right] =$$

P.G.

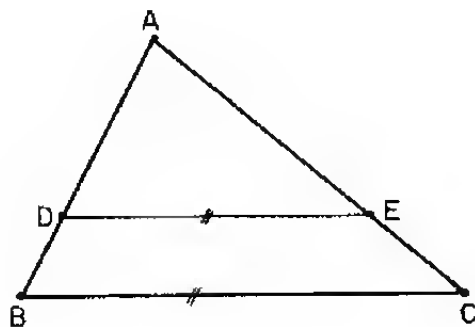
$$= a \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}$$

Resposta: $\frac{a^2}{a - b}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

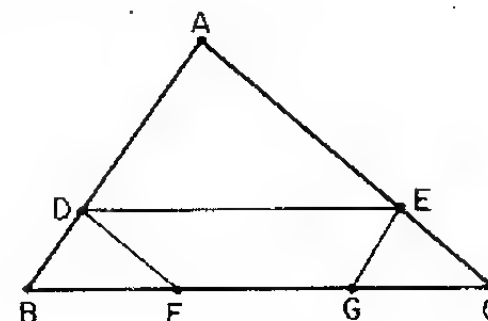
51. Na figura abaixo, $AD = 20$, $DB = 5$, $AC = 30$ e $BC = 45$. Se \overline{DE} é paralelo a BC , calcule o perímetro do trapézio $BCDE$.

- A) 80
B) 86
C) 90
D) 92
E) NRA.



52. Na figura abaixo, $BC = 32$, $\frac{BD}{BA} = \frac{1}{4}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{EG} \parallel \overline{AB}$. Então, FG mede:

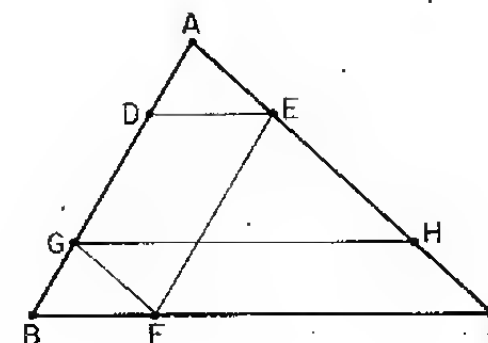
- A) 8
B) 16
C) 24
D) 30
E) NRA.



53. Na figura abaixo, $AD = \frac{1}{4} AB$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{FG} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$. Então, $\frac{EH}{AC}$ vale:

$\frac{EH}{AC}$ vale:

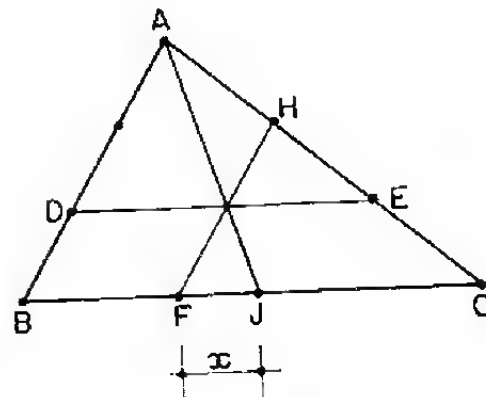
- A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{3}{4}$



54. Na figura, cada lado do triângulo ABC está dividido em três segmentos congruentes. Considere a ceviana \overline{AJ} que passa pelo ponto de encontro de \overline{DE} e \overline{FH} .

Se $FJ = x$, BC mede:

- A) $3x$
- B) $4x$
- C) $6x$
- D) $9x$
- E) NRA.



55. Dado um triângulo de perímetro P , unindo-se os pontos médios de seus lados forma-se um triângulo, unindo-se os pontos médios desse segundo triângulo forma-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. A soma dos perímetros de todos os triângulos

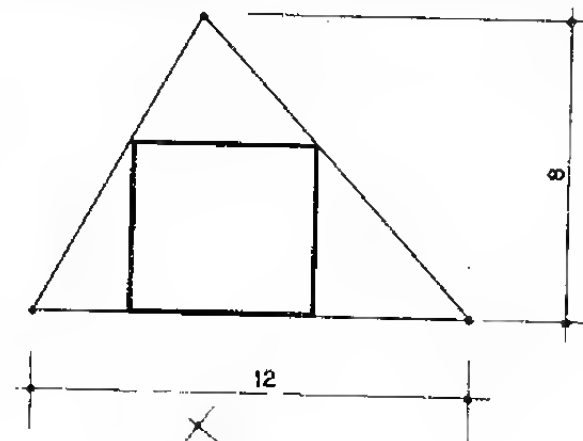
- A) é infinita
- B) é igual a P
- C) é igual a $2P$
- D) é superior a $2P$ mas finita
- E) NRA.

56. Um trapézio tem bases de comprimentos 8 e 4 e altura 9. A que distância da base maior cortam-se as diagonais?

- A) 4,5
- B) 5
- C) 6
- D) 6,5
- E) NRA.

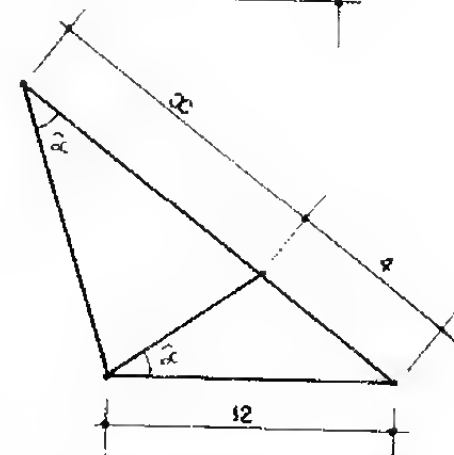
57. O comprimento do lado do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 8 é:

- A) 4
- B) 4,2
- C) 4,5
- D) 4,8
- E) 5



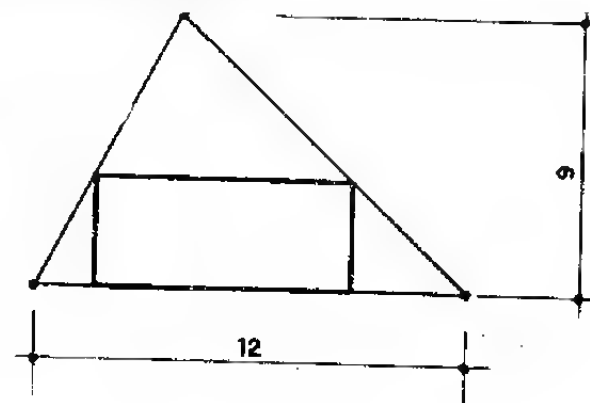
58. Calcule na figura

- A) 20
- B) 24
- C) 28
- D) 30
- E) 32



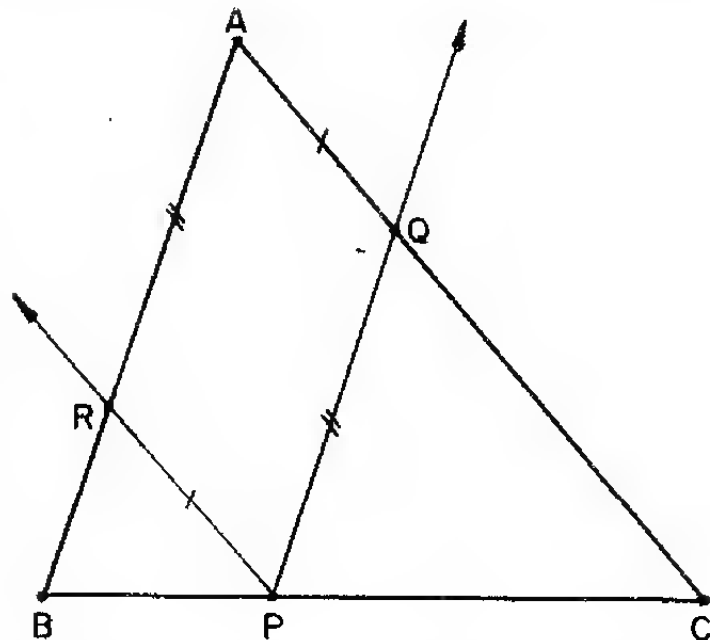
59. Um retângulo cuja base é o dobro da altura está inscrito em um triângulo de base 12 e altura 9. O perímetro desse retângulo é:

- A) 3,6
- B) 14,4
- C) 18,8
- D) 21,6
- E) NRA



60. Por um ponto P da base \overline{BC} de um triângulo ABC traçamos \overline{PQ} e \overline{PR} paralelos a \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Se $AB = 8$, $AC = 12$, $BC = 10$ e $BP = 2$, o perímetro do paralelogramo $AQPR$ é:

- A) $\frac{88}{5}$
 B) $\frac{76}{5}$
 C) $\frac{64}{5}$
 D) $\frac{44}{5}$
 E) NRA.



61. Por um ponto P da base \overline{BC} de um triângulo ABC traçamos \overline{PQ} e \overline{PR} paralelos a \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Se $AR = 4$, $RB = 1$ e $QC = 6$, então AQ mede:

- A) 1
 B) $\frac{6}{5}$
 C) $\frac{3}{2}$
 D) $\frac{8}{5}$

E) NRA.

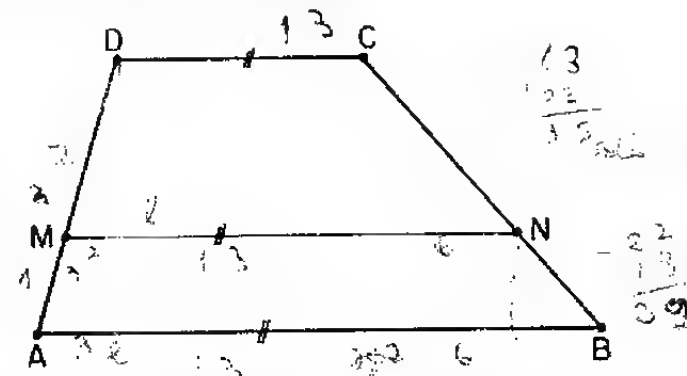
62. Num retângulo $ABCD$ de lados $AB = 15$ e $BC = 9$ traçam-se a diagonal \overline{BD} e o segmento \overline{CM} (M , médio de \overline{AB}) que se cortam em P . Por P traçam-se as perpendiculares \overline{PR} e \overline{PS} aos lados \overline{AB} e \overline{BC} . O perímetro do retângulo $PRBS$ é:

- A) 12
 B) 15
 C) 16
 D) 18

E) 20

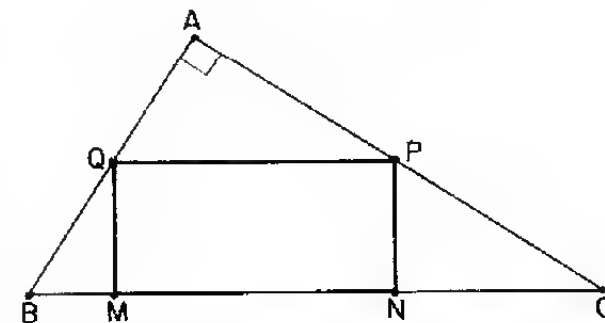
63. Na figura abaixo, $ABCD$ é um trapézio, $AB = 22$, $CD = 13$, $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2}$ e \overline{MN} é paralelo a \overline{AB} . O comprimento do segmento \overline{MN} é:

- A) 16
 B) 17
 C) 18
 D) 19
 E) 20



64. Em um triângulo ABC retângulo em A inscreve-se um retângulo $MNPO$ (\overline{MN} sobre \overline{BC}). Sendo $BC = 20$, $BM = 4$ e $NC = 9$, a perímetro do retângulo é:

- A) 18
 B) 20
 C) 24
 D) 26
 E) 30



65. Inscribe-se um quadrado em um triângulo retângulo ABC como mostra a figura. Se os catetos do triângulo retângulo medem 12 e 24, o lado do quadrado mede:

- A) 7,5
 B) 8
 C) $\frac{17}{2}$
 D) 9,25
 E) NRA.



66. Um trapézio ABCD possui bases $AB = a$ e $CD = b$. Pelo ponto de encontro das diagonais traça-se uma reta paralela às bases. Calcule o segmento desta paralela limitada pelos lados não paralelos:

A) $\frac{ab}{a+b}$

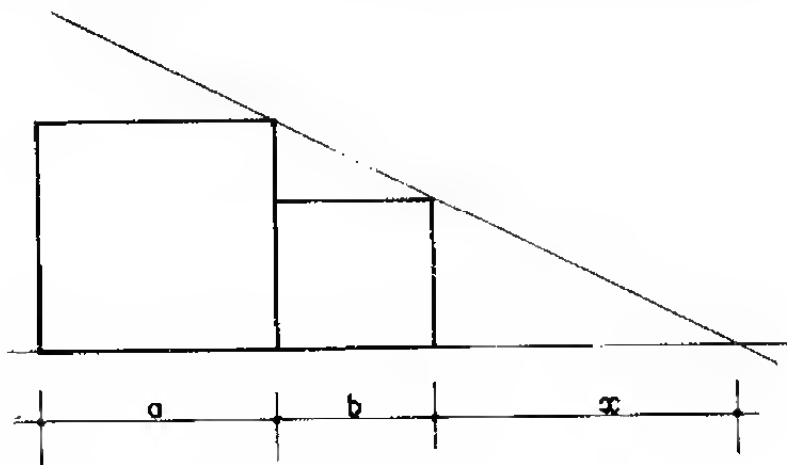
C) $\frac{ab}{2(a+b)}$

B) $\frac{2ab}{a+b}$

D) $\frac{a(a-b)}{(a+b)}$

E) NRA.

67. Considere os quadrados da figura de lados a e b ($a > b$). Então, x vale:



A) $\frac{b^2}{a-b}$

B) $\frac{a^2}{a-b}$

C) $\frac{ab}{a+b}$

D) $\frac{ab}{a-b}$

E) NRA.

68. Considere os quadrados da figura. Calcule x .

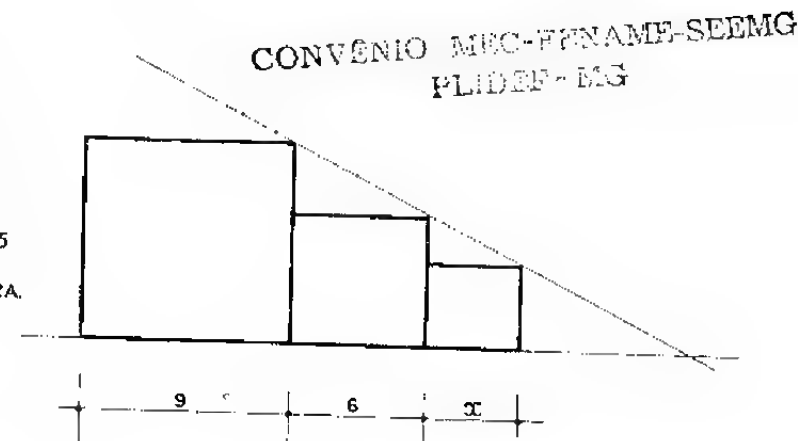
A) 2

B) 3

C) 4

D) 4,5

E) NRA.



69. O perímetro do triângulo ABC da figura é BO , sendo $BC = 9$ e DE paralela a BC , tangente ao círculo inscrito. Então, DE mede:

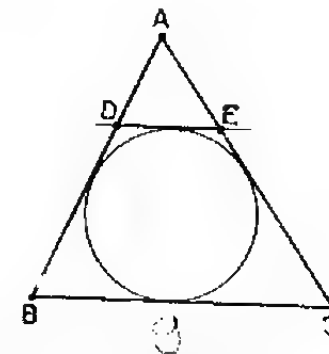
A) 3

B) $\frac{16}{5}$

C) $\frac{18}{5}$

D) 4

E) NRA.



70. Na figura, P e Q são os pontos de tangência dos círculos ex-inscrito e inscrito com o lado AC do triângulo ABC e PJ e QL são paralelos a AB . Se $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, o perímetro do trapézio $PQLJ$ vale:

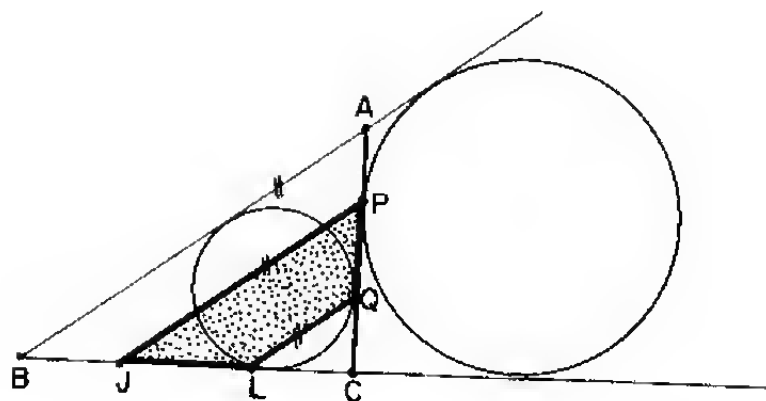
A) 15

C) 16

B) $\frac{31}{2}$

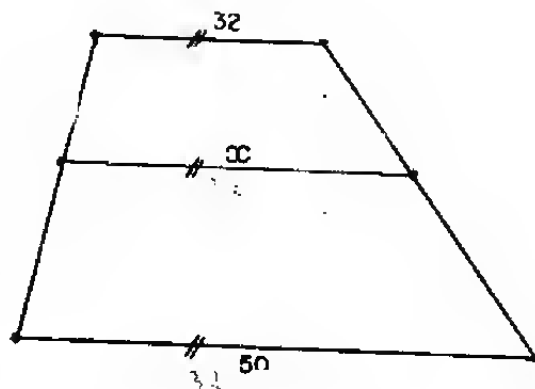
D) $\frac{33}{2}$

E) NRA.



71. Os trapézios da figura são semelhantes. Então, x vale:

- A) 40
- B) 41
- C) 42
- D) 38
- E) NRA.



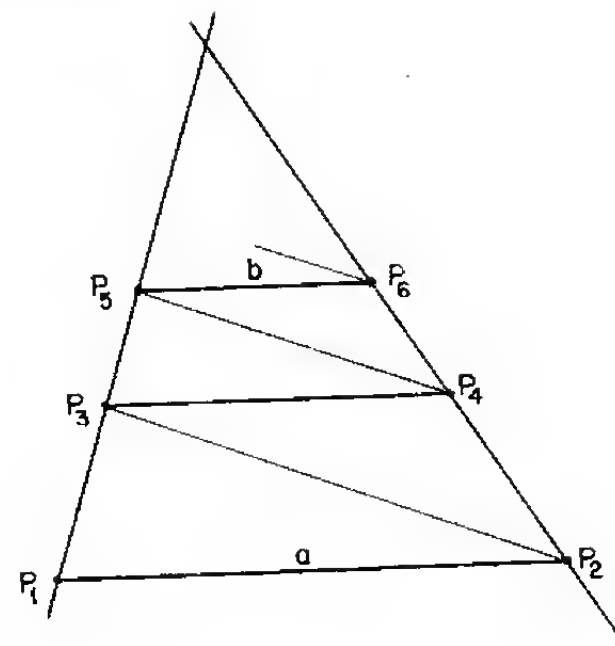
ENUNCIADO REFERENTE AS QUESTÕES 72 e 73.
Na figura ao lado, temos

$$\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_3P_4} \parallel \overline{P_5P_6} \parallel \dots \parallel \overline{P_{2n-1}P_{2n}} \parallel \dots$$

$$\overline{P_2P_3} \parallel \overline{P_4P_5} \parallel \dots \parallel \overline{P_{2n}P_{2n+1}} \parallel \dots$$

$$P_1P_2 = a$$

$$P_5P_6 = b$$



72. P_3P_4 é igual a:

- A) $\frac{a+b}{2}$
- B) $\frac{ab}{2}$
- C) \sqrt{ab}
- D) $2\sqrt{ab}$

E) NRA.

73. O limite da soma $P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \dots$ é:

- A) $a + \sqrt{ab}$
- B) $b + \sqrt{ab}$
- C) $\frac{a(b + \sqrt{ab})}{a - b}$
- D) $\frac{b(a + \sqrt{ab})}{a - b}$

E) $\frac{a(a + \sqrt{ab})}{a - b}$

74. Num círculo de raio igual a 12 está inscrito um triângulo ABC cujos lados \overline{AB} e \overline{AC} medem 8 e 9, respectivamente. A altura relativa ao lado \overline{BC} é igual a:

A) 3
B) 4
C) 6
D) 8

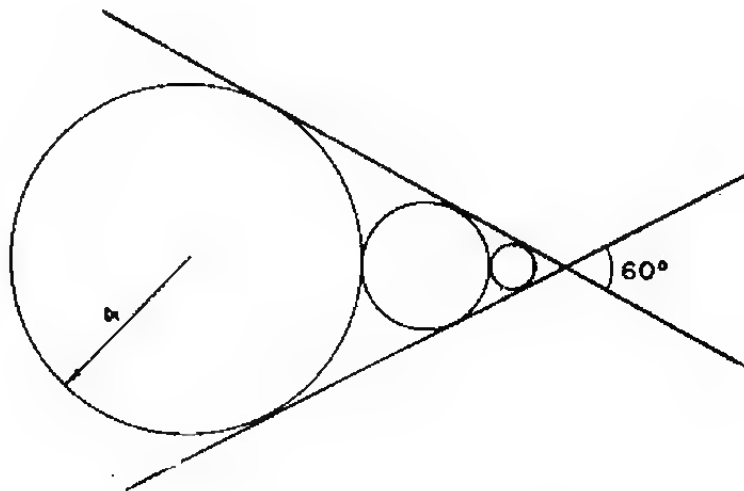
E) NRA.

75. Na quadrilátero ABCD, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Traçamos por C paralelas \overline{CE} e \overline{CF} aos lados \overline{AB} e \overline{AD} , respectivamente. Se $AF = 8$, $FB = 3$, $AE = 4$ e $ED = 6$, a diagonal AC mede:

A) 8
B) $8\sqrt{2}$
C) $10\sqrt{2}$
D) $12\sqrt{2}$

E) NRA.

76. Considerando a figura abaixo, a soma dos diâmetros de todos os círculos é:

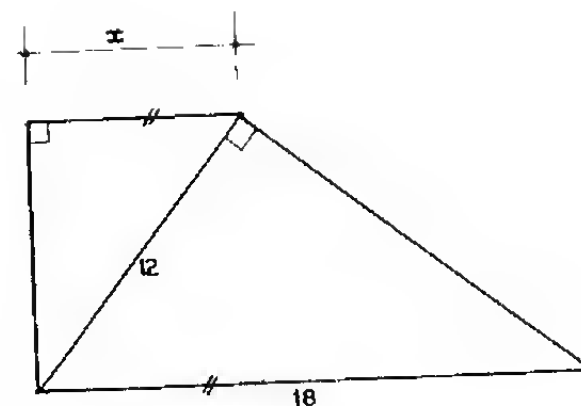


A) 15
B) 12
C) 8
D) 6

E) NRA.

77. Calcule x na figura

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) NRA.



78. Se um trapézio retângulo tem diagonais perpendiculares e bases iguais, a sua altura é igual a:

A) 18
B) 19,5
C) 20
D) não se pode calcular

E) NRA.

79. Em um triângulo ABC, a bissetriz interna de \widehat{A} encontra \overline{BC} em D e o círculo circunscrito em E. Se $AB = 8$, $AC = 6$ e $DE = 3$, calcule o comprimento da bissetriz AD.

A) 9
B) 10
C) 12
D) 13

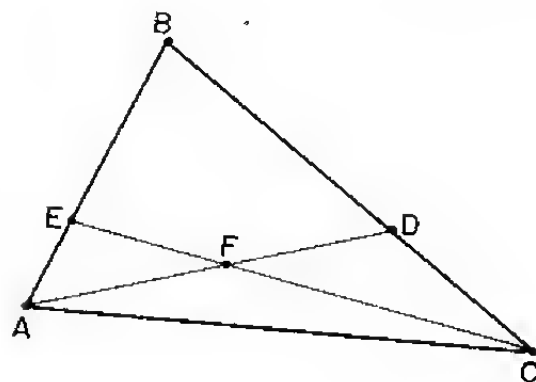
E) NRA.

80. Os pontos E e D pertencem aos lados \overline{AB} e \overline{BC} de um triângulo ABC e são tais

que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Sendo F o ponto de concurso de \overline{AD} e \overline{CE} , então

$\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$ é igual a:

- A) $\frac{4}{5}$
 B) $\frac{5}{4}$
 C) $\frac{3}{2}$
 D) 2
 E) $\frac{5}{2}$

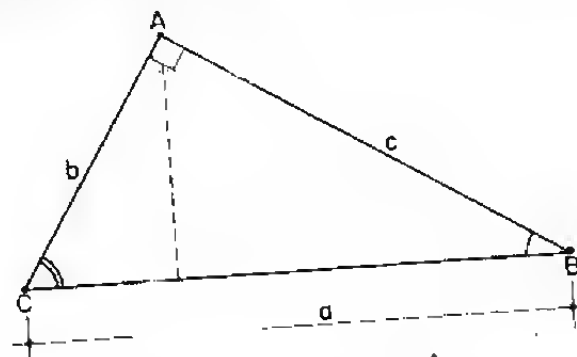
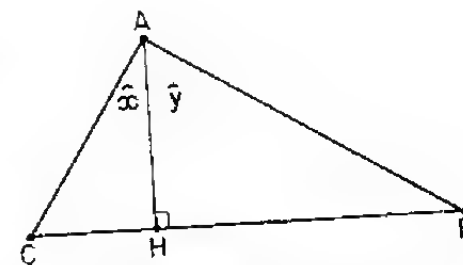


TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

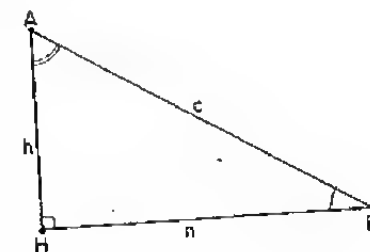
4.1 — RELAÇÕES MÉTRICAS

Seja ABC um triângulo retângulo em \hat{A} e seja AH o altura relativo à hipotenusa.

Fazendo $\widehat{CAH} = \hat{x}$ e $\widehat{BAH} = \hat{y}$, verificamos imediatamente que $\hat{B} = \hat{x}$ e $\hat{C} = \hat{y}$. Portanto, os triângulos retângulos HAC , HBA e ABC são semelhantes, como mostro o figura abaixo.



$a \rightarrow$ hipotenusa
 $b, c \rightarrow$ cotetos
 $h \rightarrow$ altura
 $m, n \rightarrow$ projeções dos cotetos sobre a hipotenusa.



Temos, então,

$$\Delta HAC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{m}{b} \Rightarrow$$

$$\boxed{bc = ah} \quad I$$

\Rightarrow

$$\boxed{b^2 = am} \quad II$$

$$\Delta HBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 = an} \quad III$$

$$\Delta HAC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{h} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h^2 = mn} \quad IV$$

A partir destes, conseguimos ainda duas outras relações importantes.

a) Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro II e III, temos

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n), \text{ mas } m + n = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad V$$

b) De I, temos $bc = ah \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2c^2 = a^2h^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{c}{b^2c^2} + \frac{b^2}{b^2c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad VI$$

concluimos, portanto, que em um triângulo retângulo,

- cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela;
- a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa;
- o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos;
- o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura;
- o inverso do quadrado da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos.

4.2 — TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Sejam $x - R, x, x + R, R > 0$ lados de um triângulo

retângulo. Então, por 4 - 1 - V,

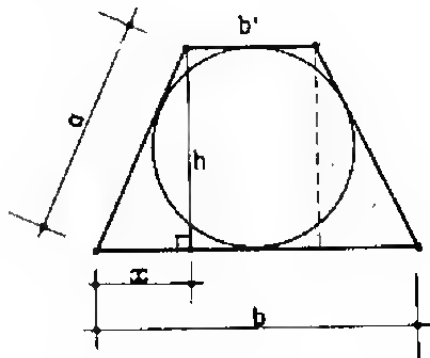
$$\begin{aligned}(x + R)^2 &= (x - R)^2 + x^2 \\ x^2 + 2xR + R^2 &= x^2 - 2xR + R^2 + x^2 \\ 4xR &= x^2 \quad \text{como } x \neq 0, \\ x &= 4R.\end{aligned}$$

Os lados do triângulo retângulo são, portanto,

$$\boxed{3R, 4R \text{ e } 5R.}$$

4.3 — TRAPÉZIO ISÓSCELES CIRCUNSCRITÍVEL

A altura de um trapézio isósceles circunscritível pode ser calculada em função das bases do trapézio.



Temos, então,

$$\begin{aligned}\left(\frac{b + b'}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4bb' &= 4h^2 \quad \text{ou}\end{aligned}$$

$$\boxed{h = \sqrt{bb'}}.$$

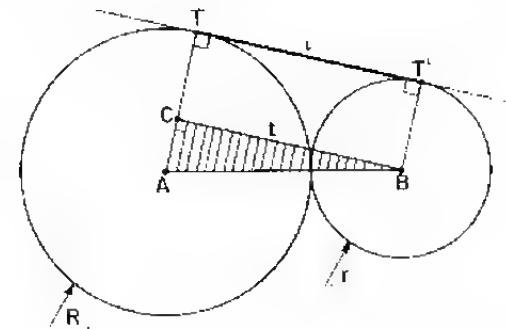
Porque o trapézio é circunscritível,

$$\begin{aligned}2a &= b + b', \\ \text{ou } a &= \frac{b + b'}{2}.\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}2x &= b - b', \\ \text{ou } x &= \frac{b - b'}{2}.\end{aligned}$$

4.4 — TANGENTE COMUM A CÍRCULOS TANGENTES



Se dois círculos são tangentes exteriormente, o segmento da tangente comum externa pode ser calculado em função dos raios.

Sejam A e B centros de dois círculos tangentes exteriormente de raios R e r e \overline{BC} paralelo a $\overline{TT'}$, como mostra a figura.

Temos

$$\overline{TT'} = t$$

$$AB = R + r$$

$$AC = R - r$$

$$BC = t.$$

Do triângulo ABC, retângulo em C, vem

$$\begin{aligned}(R + r)^2 &= (R - r)^2 + t^2 \\ 4Rr &= t^2 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2\sqrt{Rr}}.$$

4.5 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

81. Calcule a altura do triângulo equilátero de lado a .

Solução

A relação de Pitágoras fornece

$$o^2 = \left(\frac{o}{2}\right)^2 + h^2 \quad \text{ou}$$

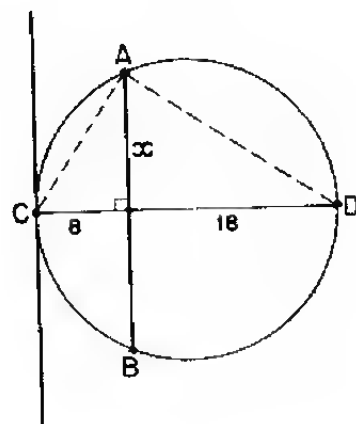
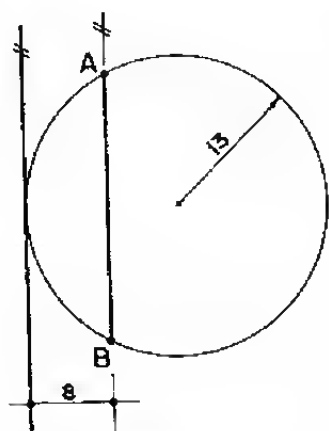
$$h^2 = o^2 - \frac{o^2}{4} = \frac{3o^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{o\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta: $h = \frac{o\sqrt{3}}{2}.$

82. Em um círculo de raio 13, considere uma tangente t e um cordo \overline{AB} paralela a t , distando 8 dessa tangente. Calcule o comprimento da corda.

Solução



Consideremos o diâmetro \overline{CD} perpendicular a \overline{AB} e o triângulo ACD , retângulo em \hat{A} . Seja $x = \frac{AB}{2}$.

Aplicando o relação IV, temos

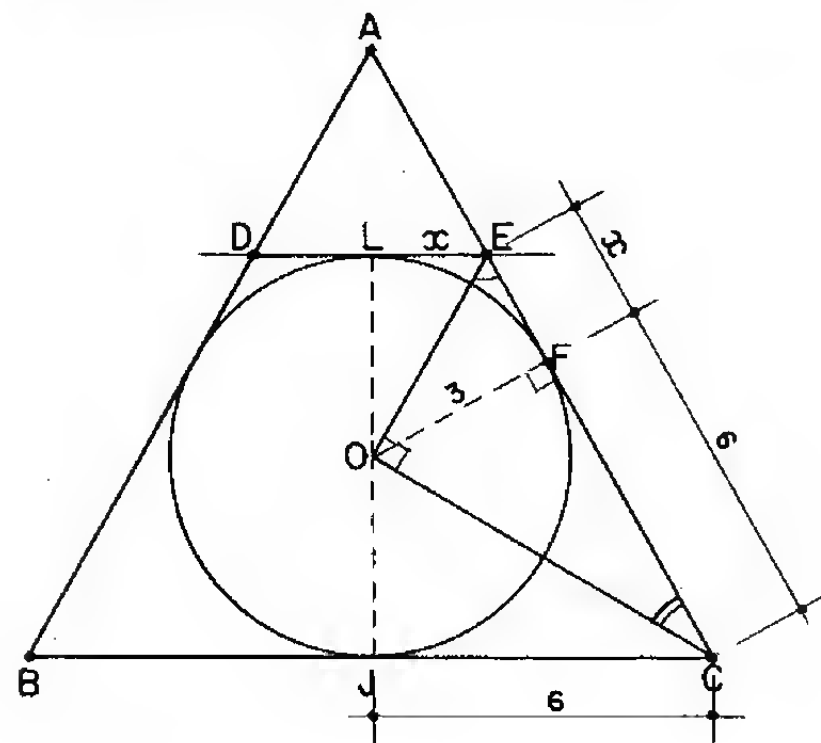
$$x^2 = 8 \cdot 18$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \Rightarrow AB = 24.$$

Resposta: 24

83. Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC = 12$ circunscrito a um círculo de raio igual a 3. Uma paralela à base \overline{BC} tangente ao círculo determina nos lados congruentes as pontos D e E . Calcule \overline{DE} .



1.ª Solução

Parque $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$, $\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{E}}{2} = 90^\circ$, sendo o triângulo OCE

retângulo em O. Como OF é altura relativa à hipotenusa e como $CJ = CF = 6$ e $EF = EL = x$, a relação IV fornece:

$$3^2 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow DE = 3.$$

2.ª Solução

Como $BCED$ é um trapézio isósceles circunscritível, por 4.3 temos

$$BC = b = 12 \quad h = \sqrt{bb'}$$

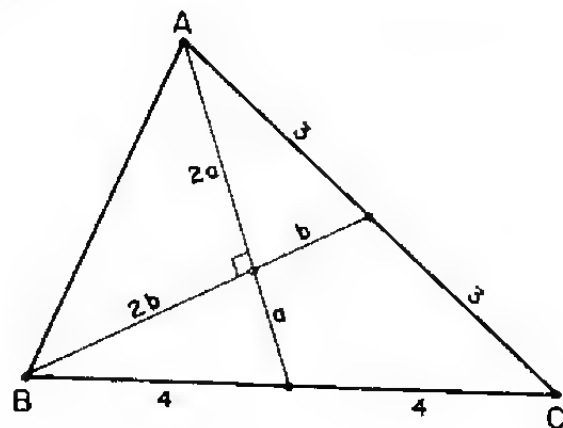
$$DE = b'$$

$$JL = h = 6 \quad 6^2 = 12 \cdot b' \Rightarrow \\ \Rightarrow b' = 3.$$

Resposta: 3

84. Em um triângulo ABC , as medianas que partem de A e de B são perpendiculares. Se $BC = 8$ e $AC = 6$, calcule AB .

Solução



$$4a^2 + b^2 = 9$$

$$4b^2 + a^2 = 16. \text{ Somando}$$

$$5a^2 + 5b^2 + 25 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.$$

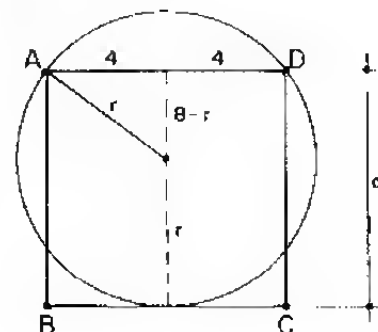
Então, $4a^2 + 4b^2 = 20 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB^2 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$$

Resposta: $2\sqrt{5}$

85. É dado um quadrado $ABCD$ de lado 8. Traça-se um círculo tangente ao lado BC passando por A e D . Calcule a raio desse círculo.

Solução



$$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$$

$$r^2 = 16 + 64 + r^2 - 16r$$

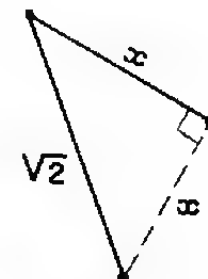
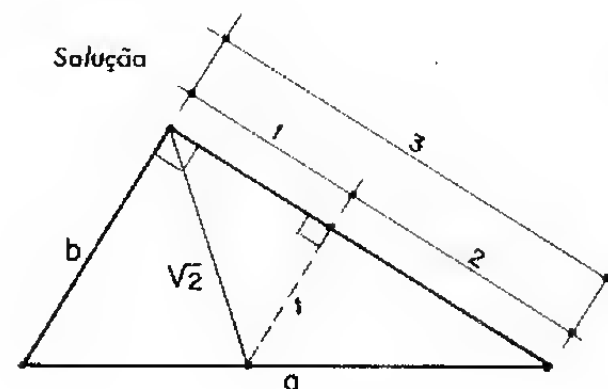
$$16r = 80$$

$$r = 5$$

Resposta: $r = 5$

86. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um dos catetos mede 3 e que a bissetriz do ângulo reto mede $\sqrt{2}$.

Solução



$$x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

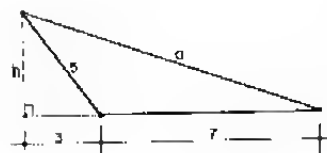
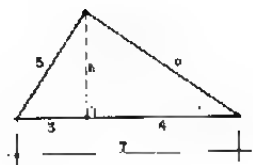
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

Resposta: $\frac{3}{2} \sqrt{5}$

87. Calcule a lado a de um triângulo sabendo que os lados b e c medem respectivamente 5 e 7 e que a projeção de b sobre c mede 3.

Solução



1.ª hipótese: $\hat{A} < 90^\circ$

$$5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

$$a^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

2.ª hipótese: $\hat{A} > 90^\circ$

$$5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

$$a^2 = 4^2 + 10^2 = 116 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2\sqrt{29}.$$

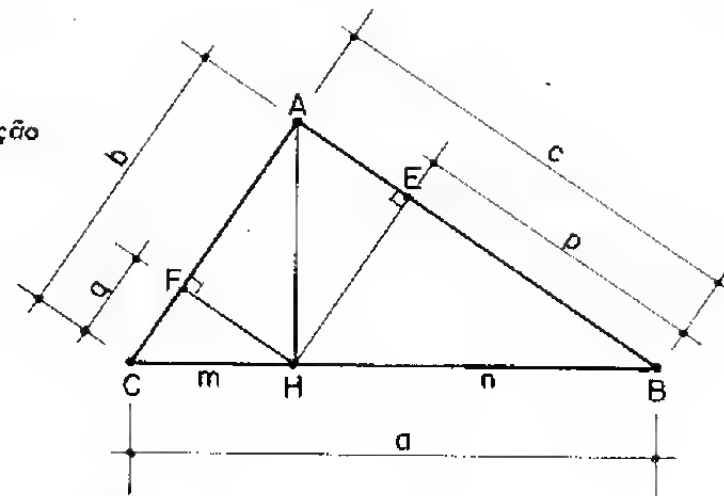
Resposta: $4\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{29}$.

88. Num triângulo ABC, retângulo em A, traçam-se a altura \overline{AH} e as segmentas \overline{HE} e \overline{HF} perpendiculares a \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente.

Se $BE = p$ e $CF = q$, prove que

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Solução



$$\triangle BEH \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{n}{a} = \frac{p}{c}$$

mas $c^2 = an$ ou $n = \frac{c^2}{a}$. Logo,

$$\frac{\frac{c^2}{a}}{a} = \frac{p}{c} \Rightarrow c^3 = a^2 p \Rightarrow c^6 = a^4 p^2 \quad (1)$$

$$\triangle CHF \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{q}{b}$$

mas $b^2 = am$ ou $m = \frac{b^2}{a}$. Logo,

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{a} = \frac{q}{b} \Rightarrow b^3 = a^2 q \Rightarrow b^6 = a^4 q^2 \quad (2)$$

Como $b^2 + c^2 = a^2$, temos

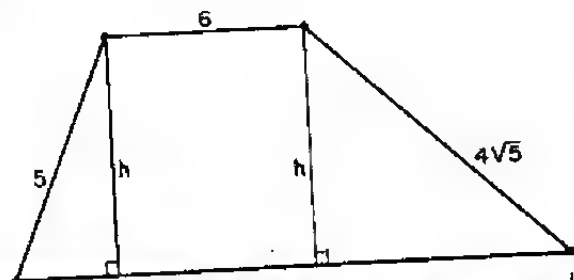
$$\sqrt[3]{a^4 p^2} + \sqrt[3]{a^4 q^2} = \sqrt[3]{a^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

C.Q.D.

89. As bases de um trapézio medem 17 e 6. Os lados não paralelos medem 5 e $4\sqrt{5}$. Calcule a altura desse trapézio.

Solução



$$25 = h^2 + x^2$$

$$80 = h^2 + y^2$$

Subtraindo,

$$55 = (y^2 - x^2) = (y + x)(y - x)$$

$$55 = 11(y - x) \Rightarrow y - x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} y + x = 11 \\ y - x = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3, y = 8$$

$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4$$

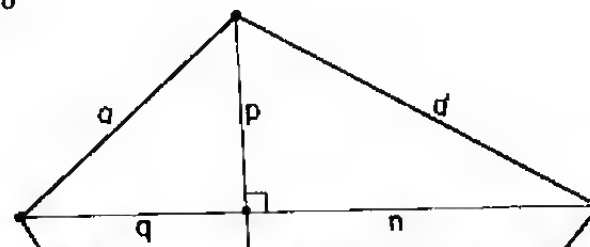
$$h^2 = (4\sqrt{5})^2 - 8^2 = 80 - 64 = 16 \Rightarrow h = 4$$

Resposta: 4.

90. Se a , b , c e d são lados de um quadrilátero de diagonais perpendiculares, prove que

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Solução



$$a^2 = p^2 + q^2$$

$$c^2 = m^2 + n^2$$

$$a^2 + c^2 = p^2 + q^2 + m^2 + n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

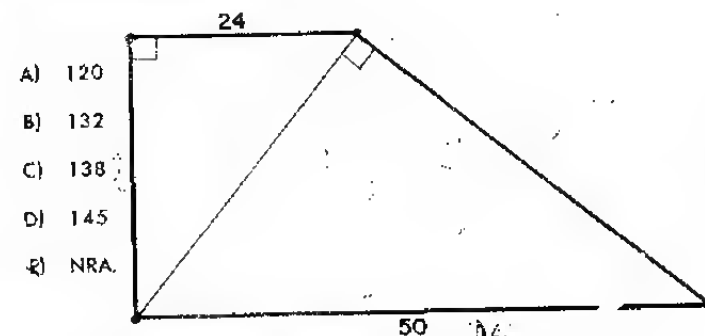
PROBLEMAS PROPOSTOS

91. Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. A razão desta progressão é:
- A) $\sqrt{5}$ C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 B) $1+\sqrt{5}$ D) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
 E) NRA.
92. Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 e 20. A altura relativa à hipotenusa mede:
- A) 8 C) 12
 B) 10 D) 15
 E) NRA.
93. Os catetos de um triângulo retângulo medem 3 e 6. A razão entre as projeções desses catetos sobre a hipotenusa é:
- A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
 B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$
 E) NRA.
94. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 e a altura a ela relativa mede 3. O menor cateto desse triângulo mede:
- A) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{2}$
 B) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{10}$
 E) NRA.
95. Considere um triângulo equilátero ABC de lado 12, uma altura \overline{AH} e o ponto M, médio dessa altura. O segmento \overline{BM} mede:
- A) $\sqrt{18}$ C) 6
 B) $\sqrt{28}$ D) $\sqrt{63}$
 E) $\sqrt{98}$

96. Considere um ponto P no interior de um quadrado de lado a , de forma que tenha mesma distância a dos vértices consecutivos e ao lado oposto a esses vértices. Se d é a distância comum, então d vale:

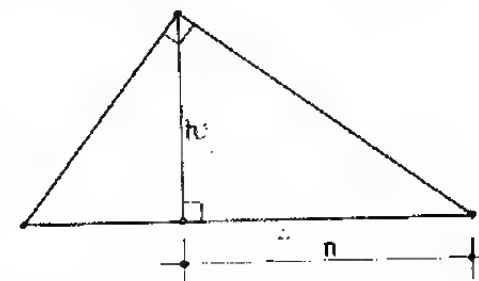
- A) $\frac{3a}{5}$ C) $\frac{3a}{8}$
 B) $\frac{5a}{8}$ D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
 E) $\frac{a}{2}$

97. Calcule o perímetro do trapézio da figura



98. Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo sendo $h = 9$ e $n = 12$.

- A) 16
 B) 18
 C) 18,5
 D) 20
 E) NRA.



99. Em um triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 18 e 32. O perímetro desse triângulo é igual a:
- A) 120 C) 132
 B) 125 D) 150
 E) NRA.

100. Em um trapézio isósceles de bases 5 e 3, a altura é igual a 2. Os lados congruentes do trapézio medem:

A) $\frac{5}{2}$ C) $\sqrt{5}$
B) 3 D) $\sqrt{6}$

E) NRA.

101. As bases de um trapézio circunscrito a um círculo medem 9 e 6. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede:

A) 4,5 C) 7,5
B) 6 D) 8

E) NRA.

(EPUSP — 66)

102. Em um trapézio retângulo de bases 1 e 3, a altura é igual a $\sqrt{3}$. Então assinale a afirmativa falsa:

A) o lado oblíquo às bases mede $\sqrt{7}$
B) a menor diagonal mede 2
C) a maior diagonal mede $2\sqrt{3}$
D) uma das diagonais é perpendicular ao lado oblíquo às bases
E) uma das anteriores é falsa.

103. O raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado igual a $6\sqrt{3}$ mede:

A) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
B) $2\sqrt{3}$ D) 3

E) NRA.

104. Um trapézio isósceles é circunscrito a um círculo. Se seu perímetro é 36 e uma base é o quádruplo da outra, a altura desse trapézio mede:

A) 6 C) $3\sqrt{5}$
B) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ D) $2\sqrt{2}$

E) NRA.

105. Num triângulo retângulo de catetas b e c e hipotenusa a está inscrito um círculo. O raio desse círculo é:

A) $\frac{b+c-a}{2}$ C) $\sqrt{a^2 - b^2}$
B) $\frac{2(a+b+c)}{3}$ D) $\frac{a+b+c}{2}$

E) NRA.

(FEIUC — 67)

106. Dois círculos de raios 9 e 4 são tangentes exteriormente. O comprimento da tangente comum externa mede:

A) 6 C) 9
B) 8 D) 10

E) 12

107. A distância entre os centros de dois círculos é 37. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum externa mede:

A) 30 C) 33
B) 32 D) 34

E) 35

108. A distância entre os centros de dois círculos é 53. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum interna vale:

A) 45 C) 48
B) 46 D) 50

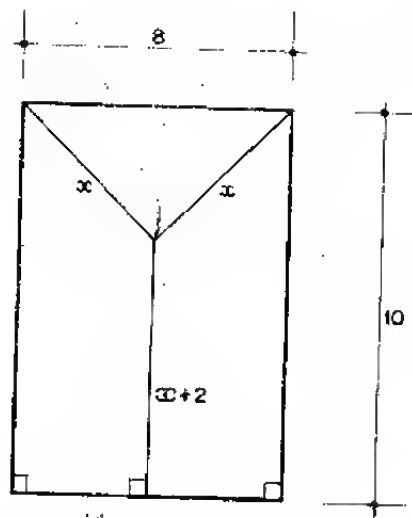
E) 52

109. Considere um triângulo ABC de catetos $AB = 5a$ e $AC = 4a$. Pelo ponto M, médio de AC, trace MN perpendicular a BC. Se N é exterior ao triângulo e se $MN = a$, BN mede:

A) $7a$ C) $5a\sqrt{2}$
B) $a\sqrt{40}$ D) $\frac{15a}{2}$

E) NRA.

110. Calcule x na figura



- A) 4
B) 4,5
C) 5
D) 6
E) NRA.

111. O perímetro de um triângulo retângulo é 12 e a altura relativa à hipotenusa mede 2. A hipotenusa desse triângulo mede:

- A) 5
B) $\frac{36}{7}$
C) 6
D) $\frac{41}{8}$
E) NRA.

112. O raio do círculo inscrito em um losango de diagonais 2 e 4 mede:

- A) $\frac{2}{5}$
B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
E) NRA.

113. Um trapézio retângulo de bases a e b possui diagonais perpendiculares. A altura desse trapézio mede:

- A) $\frac{ab}{a+b}$
B) $\frac{a+b}{2}$
C) \sqrt{ab}
D) não pode ser calculado
E) NRA.

114. Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r , interiores a Q , dos quais um é concêntrico com Q e tangente externamente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q . Então, r é igual a:

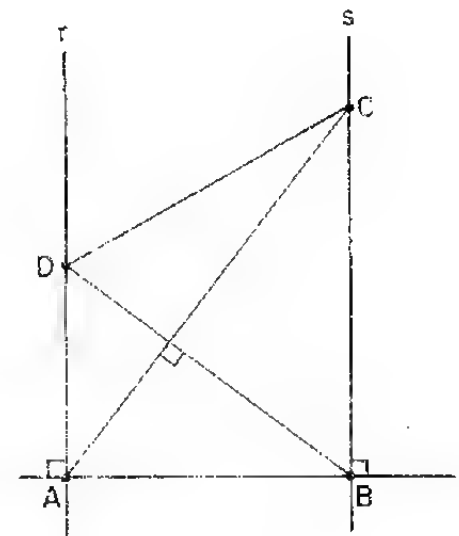
- A) $\frac{a(2 - \sqrt{2})}{3}$
B) $\frac{a(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{8}$
C) $\frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$
D) $\frac{a}{5}$
E) nada disso. (CICE — 70)

INUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 115 E 116

As retas r e s são perpendiculares a t , como mostra a figura. Sabe-se que $AB = 2a$, $BC = 3a$ e que \overline{AC} é perpendicular a \overline{BD} .

115. AD mede:

- A) a
B) $2a$
C) $\frac{3}{2}a$
D) $\frac{4}{3}a$
E) NRA.



116. DC mede:

- A) $\frac{5}{2}a$
B) $3a$
C) $2a\sqrt{7}$
D) $\frac{a}{3}\sqrt{61}$
E) NRA.

117. O raio do círculo inscrito em um setor circular de raio r e ângulo de 60° é:

A) $\frac{r}{2}$

C) $\frac{r}{4}$

B) $\frac{r}{3}$

D) $\frac{r}{5}$

E) NRA.

(EPUSP — 67)

118. P é um ponto interior a um retângulo $ABCD$ e tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Então, PD mede:

A) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$

E) 2.

119. É dado um triângulo ABC retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , ($b < c$). Pelo ponto M , média da hipotenusa BC , traça-se MN perpendicular a BC ($N \in AC$). O círculo circunscrito ao quadrilátero $CAMN$ tem raio igual a:

A) $\frac{a^2}{2c}$

C) $\frac{a^2}{4c}$

B) $\frac{a^2}{ab}$

D) $\frac{a^2}{4b}$

E) NRA.

120. Sejam b e c catetos e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos, então, afirmar que a equação

$$\frac{2}{b}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{c} = 0$$

A) tem sempre raízes reais

B) tem sempre raízes imaginárias

C) tem sempre raízes cuja soma dos quadrados é $4a^2$ D) só terá raízes reais se $h^2 > bc$

E) nada se pode afirmar.

121. Considere um semicírculo de centro O , diâmetro AB e raio R . Construa internamente a esse semicírculo dois outros de diâmetros AO e OB e um círculo tangente internamente ao primeiro e externamente ao segundo e terceiro semicírculos. O raio deste círculo é:

A) $\frac{R}{2}$

C) $\frac{R}{4}$

B) $\frac{R}{3}$

D) $\frac{2R}{5}$

E) NRA.

122. São dados dois círculos tangentes externamente de mesma raio R . Calcule o raio do círculo tangente aos dois primeiros e a tangente comum externa.

A) $\frac{R}{2}$

B) $\frac{R}{3}$

C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{5}$

E) NRA.

123. As bases de um trapézio retângulo circunscritível a um círculo medem 15 e 10. Sua altura mede:

A) 10

C) $8\sqrt{2}$

B) 12

D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

124. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo cujos lados medem 5, 5 e 6.

A) 1

C) $\frac{3}{2}$

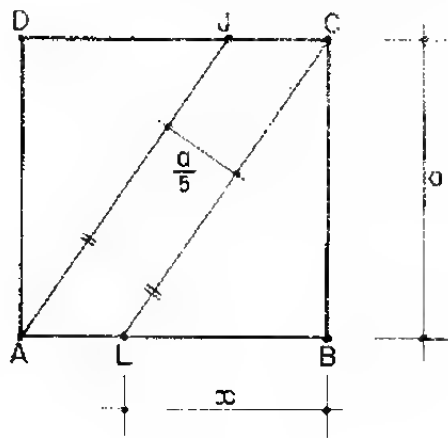
B) $\frac{3}{4}$

D) 2

E) NRA.

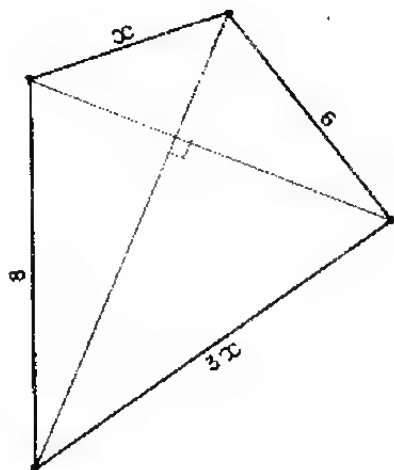
125. Seja ABCD um quadrado de lado a , como mostra a figura. Por A e C traçam-se \overline{AJ} e \overline{CL} paralelos. Se a distância entre essas paralelas é $\frac{a}{5}$, calcule $DJ = BL = x$.

- A) $\frac{3a}{4}$
 B) $\frac{3a}{5}$
 C) $\frac{4a}{5}$
 D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$
 E) NRA.



126. Calcule x na figura

- A) $\sqrt{5}$
 B) $\sqrt{7}$
 C) $3\sqrt{3}$
 D) $\sqrt{10}$
 E) NRA.



127. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um cateto é igual a 6 e que a projeção do outro sobre a hipotenusa é igual a 5.

- A) $6\sqrt{3}$
 B) $4\sqrt{2}$
 C) 8
 D) $\frac{28}{3}$

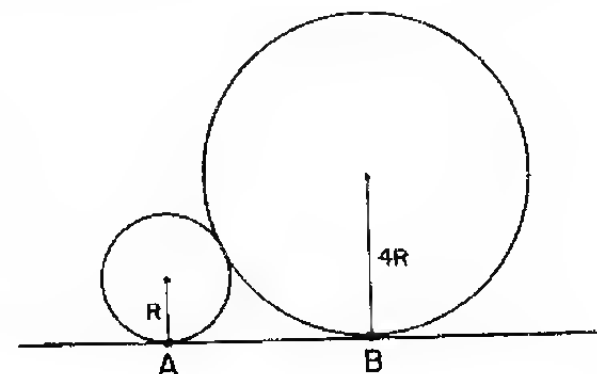
E) 9.

128. Em um círculo de raio 6 está inscrito um triângulo ABC onde $\hat{A} = 45^\circ$. Então,

- A) $AB = AC$
 B) $BC = 6$
 C) $BC = 6\sqrt{2}$
 D) $BC = 3\sqrt{2}$
 E) NRA.

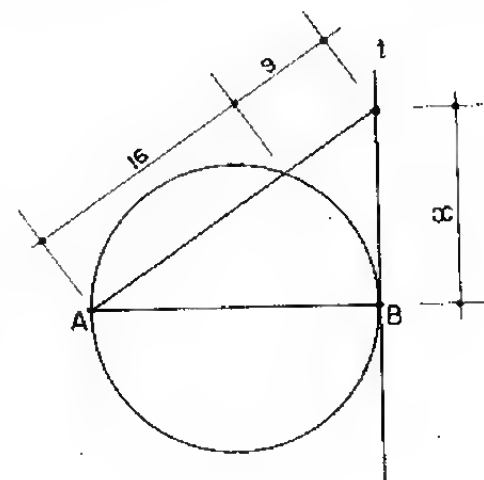
129. Dois círculos de raios R e $4R$ são tangentes externamente e tangentes a uma reta nos pontos A e B. Então, AB vale:

- A) $2R$
 B) $\frac{7}{2}R$
 C) $\frac{10}{3}R$
 D) $4R$
 E) $5R$.



130. Calcule x na figura sabendo que \overline{AB} é um diâmetro e t é tangente em B no círculo.

- A) 10
 B) 12
 C) 15
 D) 18
 E) NRA.

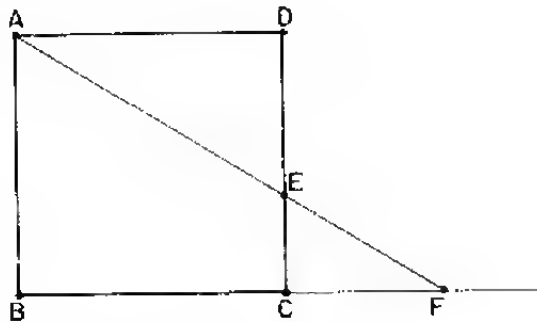


131. Dois círculos de raios 8 e 10 são ortogonais. O comprimento da corda comum é:

- A) $\sqrt{10}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$
 B) $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$
 E) NRA.

132. Pela vértice A de um quadrado ABCD traça-se uma secante que encontra \overline{CD} em E e a prolongamento de \overline{BC} em F. Se $AE = 3$ e $EF = 1$, a lado do quadrado mede:

- A) $\frac{9}{5}$
 B) $\frac{10}{3}$
 C) $\frac{9}{2}$
 D) $\frac{15}{7}$
 E) $\frac{12}{5}$

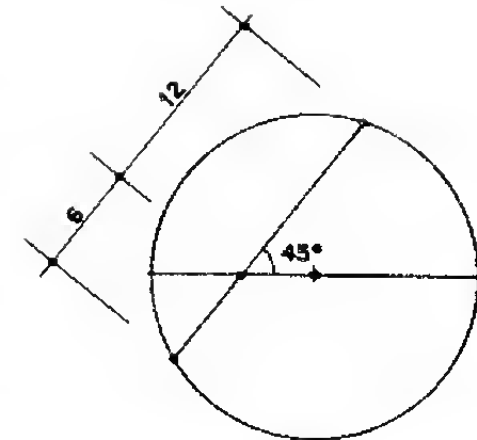


133. Calcule a altura de um trapézio isósceles de bases iguais a 10 e 6 sabendo que as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases

- A) 3 C) 5
 B) 4 D) $\sqrt{5}$
 E) NRA.

134. Uma corda de um círculo corta um de seus diâmetros segundo um ângulo de 45° . A corda fica então dividida em dois segmentos que medem 12 e 6. O raio desse círculo mede:

- A) $2\sqrt{10}$
 B) $3\sqrt{10}$
 C) $6\sqrt{5}$
 D) 10
 E) NRA.



135. A base maior e um dos lados congruentes de um trapézio isósceles circunscritível medem respectivamente 16 e 10. A altura desse trapézio é igual a:

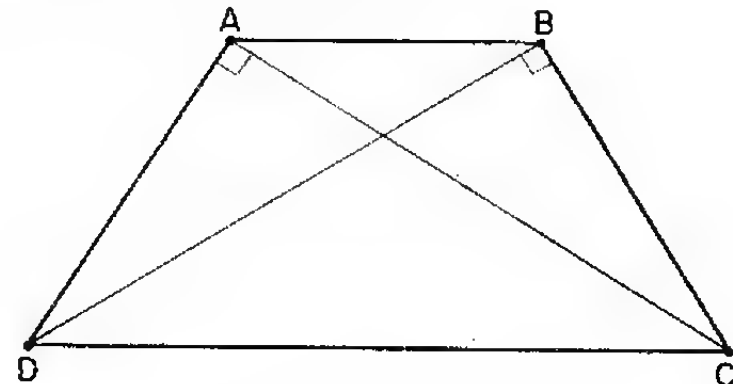
- A) 4 C) 8 E) NRA.
 B) 6 D) 9

136. Considere a figura que consiste em um segmento \overline{AB} de comprimento a e dois arcos circulares AC e BC de raio a e centros respectivamente em B e A. O raio da círculo inscrita nessa figura, tangente ao segmento AB e aos arcos AC e BC, é:

- A) $(\sqrt{2} - 1)a$ C) $\frac{3a}{8}$
 B) $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ D) $\frac{2a}{5}$
 E) NRA.

(CICE — 70)

137. ABCD é um trapézio, $CD = 25$ e $AD = 15$



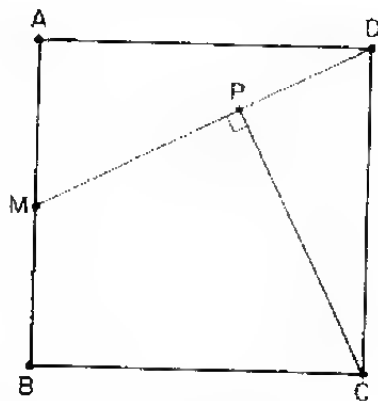
Então,

- A) $AC = BD = 24$
- B) sua altura vale 10
- C) ABCD é circunscritível
- D) $AB = 7$
- E) NRA.

(TESTE VETOR — 72)

138. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado. Calcule seu lado sabendo que M é ponto médio de AB, CP perpendicular a MD e $MP = 3$.

- A) 5
- B) $\sqrt{7}$
- C) $2\sqrt{5}$
- D) indeterminado
- E) NRA.



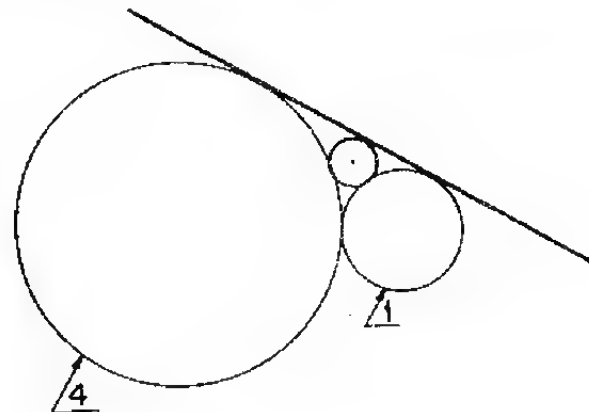
(V.I. DEZ 71)

139. O raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles de base 6 e altura 9 é:

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 6,5
- E) NRA.

140. Dois círculos de raios 4 e 1 são tangentes exteriormente, como mostra a figura. Calcule o raio do círculo tangente a estes círculos e a tangente comum externa.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{3}{5}$
- D) $\frac{4}{9}$
- E) NRA.



CONVENIO MEC-FENAM-DEBAC
1971

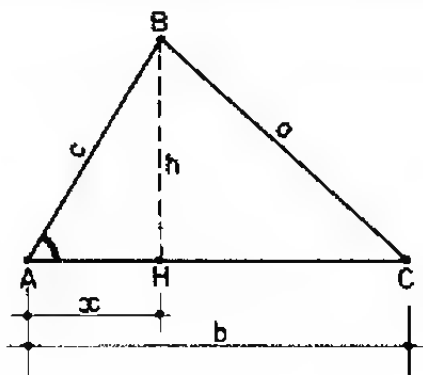
TRIÂNGULOS QUAISQUER

5.1 — LEI DOS CO-SENOS

Em um triângulo, a quadrada de um lado é igual à soma das quadradas dos outros dois menos o duplo produto destes dois lados pela co-seno do ângulo formado.

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Consideremos ainda a altura $BH = h$ e a projeção $AH = x$ da lado AB sobre a lado AC .



Temos, então,

$$\left. \begin{aligned} \triangle BHC &\Rightarrow a^2 = h^2 + (b-x)^2 \\ \triangle BHA &\Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 - x^2 + (b-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \quad (1)$$

$$\triangle BHC \Rightarrow \cos \widehat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = c \cdot \cos \widehat{A}.$$

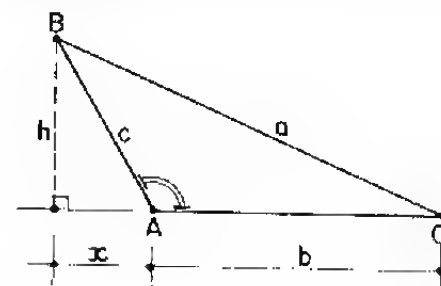
Substituindo B em (1), teremos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C} \end{aligned}$$

Analogamente,

e

O leitor deve notar que não há alteração alguma se $\widehat{A} > 90^\circ$, pois



$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \quad (2)$$

$$\text{mas } \frac{x}{c} = \cos(180^\circ - \widehat{A}) = -\cos \widehat{A} \Rightarrow x = -c \cos \widehat{A}.$$

Assim, substituindo em (2), chegaríamos novamente a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}.$$

5.2 — SÍNTESE DE CLAIRAUT

Observando a lei dos co-senos, podemos escrever

$$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

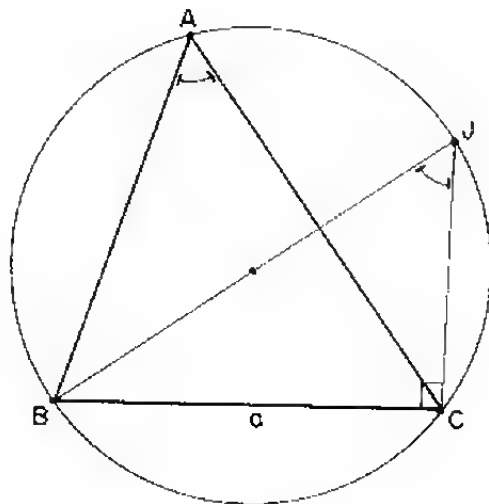
$$\widehat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

5.3 — LEI DOS SENOS (Lamy)

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão da diâmetro da circunscrita ao triângulo.

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados a , b e c inscrito em um círculo de raio R e seja \overline{BJ} um diâmetro desse círculo. Como o triângulo BJC é retângulo em C e como $\widehat{J} = \widehat{A}$, vem

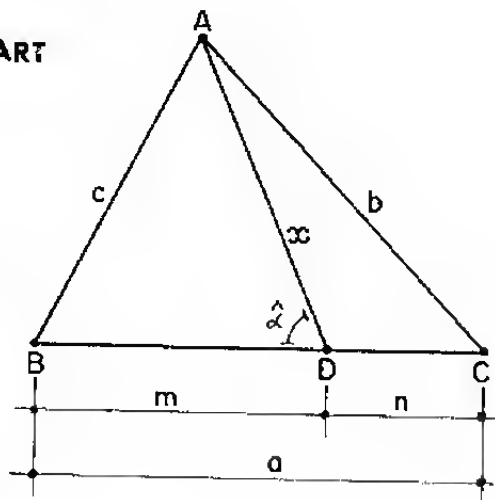


$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R. \text{ Analogamente,}$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

5.4 — RELAÇÃO DE STEWART

Seja ABC um triângulo de lados a , b e c e seja x o comprimento de uma ceviana \overline{AD} que divide \overline{BC} em dois segmentos m e n .



Da lei dos co-senos vem

$$\Delta ABD \quad c^2 = x^2 + m^2 - 2xm \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta ADC \quad b^2 = x^2 + n^2 - 2xn \cos (180^\circ - \alpha) \quad (2)$$

Multiplicando a primeira equação por n , a segunda por m e lembrando que $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, temos

$$c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn \cos \alpha$$

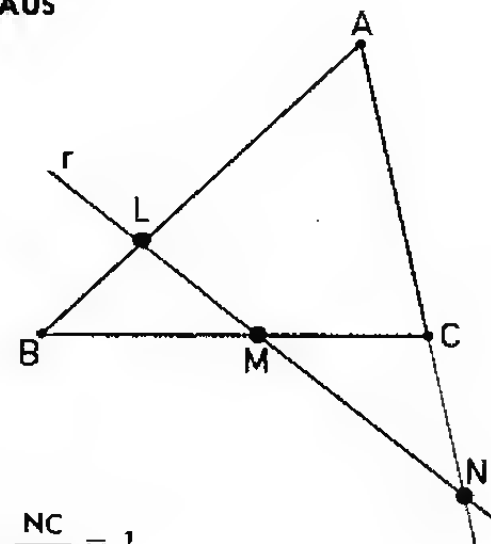
$$b^2m = x^2m + n^2m + 2xmn \cos \alpha. \text{ Somando,}$$

$$b^2m + c^2n = x^2(m+n) + mn(m+n), \text{ mas } m+n=a,$$

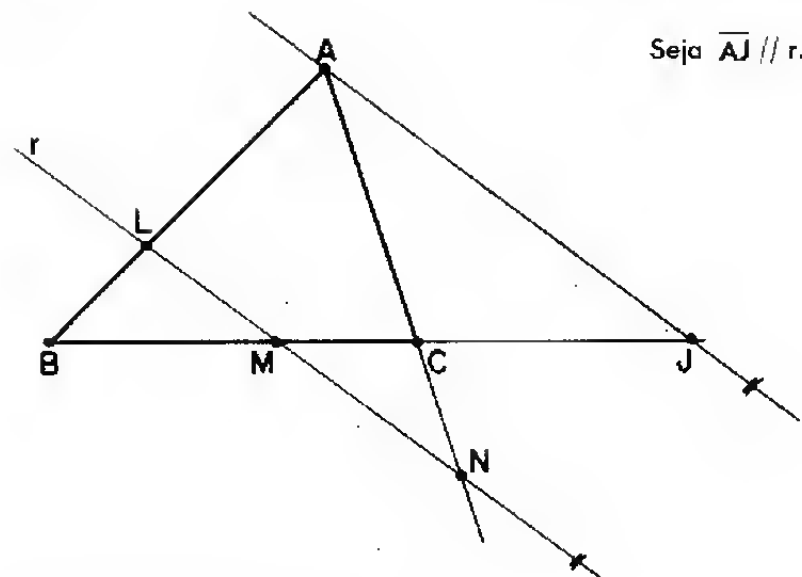
$$b^2m + c^2n = x^2a + mna.$$

5.5 — TEOREMA DE MENELAUS

Uma reta qualquer determina, sobre as laterais de um triângulo ABC , as pontas L , M e N , como mostra a figura.



Mostraremos que $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$

Seja $\overline{AJ} \parallel r$.

Considerando as paralelas e as secantes \overline{BLA} e \overline{BMJ} , temos

$$\frac{LA}{MJ} = \frac{LB}{MB} \text{ ou } \frac{LA}{MJ} = \frac{MB}{LB} = 1.$$

E agora, das secantes \overline{MJ} e \overline{AN} , tiramos

$$\frac{MJ}{NA} = \frac{MC}{NC} \text{ ou } \frac{MJ}{NA} = \frac{NC}{MC} = 1.$$

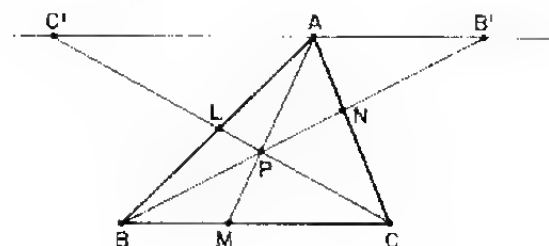
Multiplicando membro a membro, temos

$$\frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} \cdot \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \text{ ou}$$

$$\boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.}$$

5.6 — TEOREMA DE CEVA

Consideremos em um triângulo ABC três cevianas, \overline{AM} , \overline{BN} e \overline{CL} . Se essas três cevianas forem concorrentes, então $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, e reciprocamente.

Seja $r \parallel \overline{BC}$.

Das triângulos semelhantes formadas, temos

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB'}, \quad \frac{LA}{LB} = \frac{AC'}{BC}.$$

Multiplicando membro a membro,

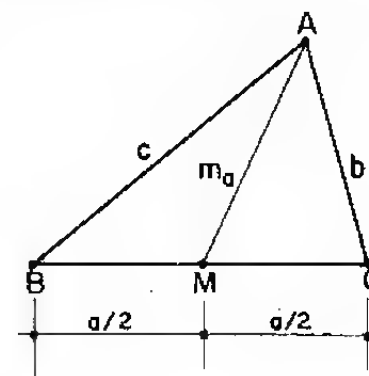
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{BC}{AB'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1}$$

5.7 — CÁLCULO DAS PRINCIPAIS CEVIANAS

a) Mediana

Seja m_a a mediana relativa ao lado a de um triângulo ABC



A relação de Stewart fornece

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

$$\frac{1}{2} (b^2 + c^2) = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Analogamente,

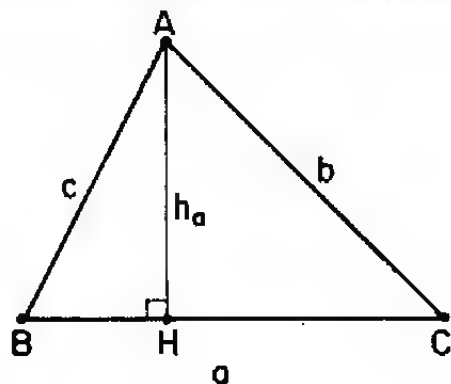
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

b) *Altura*

Seja h_a a altura relativa ao lado a de um triângulo ABC



Da lei das co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \underbrace{\cos \hat{B}}_{BH}$$

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$h_a^2 = c^2 - \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} \right]^2$$

$$h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ b + c - a &= 2(p - a) \\ a + c - b &= 2(p - b) \\ a + b - c &= 2(p - c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$h_a^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2}$$

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Analogamente, se

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} & \text{então} \\ h_b &= \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} & \text{e} \\ h_c &= \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

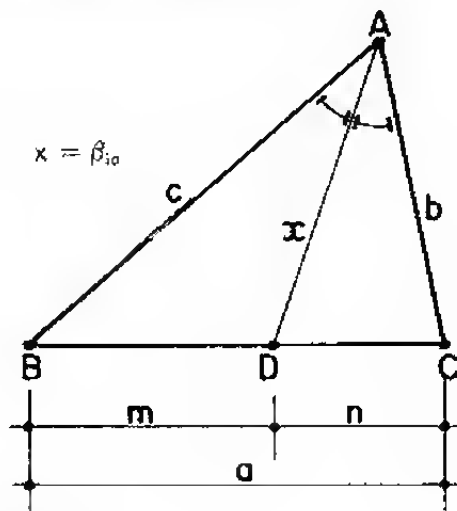
c) *Bissetriz interna*

Seja β_{ia} a bissetriz interna relativa ao lado a de um triângulo ABC.

De 2.7, temos

$$m = \frac{ac}{b+c}$$

$$n = \frac{ab}{b+c}$$



A relação de Stewart fornece

$$\frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = x^2a + \frac{a^2bc \cdot a}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc(b+c)}{b+c} = x^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = x^2$$

$$x^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc \cdot 2p \cdot 2(p-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b+c)^2} bcp(p-a)$$

$$x = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

Analogamente, se

$$\beta_{ia} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}, \quad \text{então}$$

$$\beta_{ib} = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)} \quad \text{e}$$

$$\beta_{ic} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

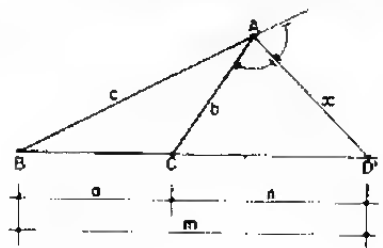
d) *Bissetriz externa*

Seja β_{ea} o comprimento da bissetriz externa relativa ao lado a de um triângulo ABC.

Ainda de 2-7, temos

$$m = \frac{ac}{|c-b|}$$

$$n = \frac{ab}{|c-b|}$$



$$x = \beta_{ea}$$

No triângulo ABD', a relação de Stewart fornece

$$x^2 a + c^2 \frac{ab}{|c-b|} = b^2 \frac{ac}{|c-b|} + \frac{a \cdot ab \cdot ac}{(c-b)^2}$$

$$x^2 = \frac{-bc(b-c)^2 + bca^2}{(b-c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc[(a+b-c) \cdot (a+c-b)]}{(b-c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc \cdot 2(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b-c)^2} bc(p-b)(p-c)$$

$$x = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Analogamente, se

$$\beta_{ea} = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}, \text{ então}$$

$$\beta_{ab} = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{ac(p-a)(p-b)} \text{ e}$$

$$\beta_{ec} = \frac{2}{|a-b|} \sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

5.8 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

141. Calcule o terceiro lado de um triângulo sabendo que as duas primeiras medem 5 e 8 e que formam 60° .

Solução

$$\text{Temos } b = 5, c = 8 \text{ e } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Pelo Lei dos Co-senos,

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = 7$$

Resposta: 7

142. Determine a natureza da triângulo cujos lados medem 12, 23 e 19.

Solução

Basta comparar

$$a^2 = 23^2 = 529$$

$$b^2 + c^2 = 12^2 + 19^2 = 144 + 361 = 505$$

Como $529 > 505$, ou seja, como

$a^2 > b^2 + c^2$, o triângulo é OBTUSÂNGULO.

143. Em um triângulo ABC, $AB = 10$, $AC = 14$ e $BC = 16$. Calcule $\cos \hat{B}$.

Solução

$$\text{Temos: } a = 16$$

$$b = 14$$

$$c = 10$$

Pelo Lei dos Co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{256 + 100 - 196}{320} = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Resposta: } \cos \widehat{B} = \frac{1}{2}$$

144. Calcule x no triângulo oboixo.

Solução

Pelo Lei dos Co-senos,
temos

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+1) \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{pois } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (não serve)} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } \frac{3}{2}$$

145. Um triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio igual a 13. Se $a = 10$, calcule $\cos \widehat{A}$.

Solução

Pelo Lei dos Senos, temos

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin \widehat{A}} = 26 \Rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \widehat{A} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{A}} = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{Resposta: } \pm \frac{12}{13}$$

146. O produto dos senos dos ângulos de um triângulo é $k \frac{abc}{R^3}$, onde a , b e c são os lados e R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo. Calcule k .

Solução

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \Rightarrow$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2R}, \sin \widehat{B} = \frac{b}{2R}, \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R}$$

Então,

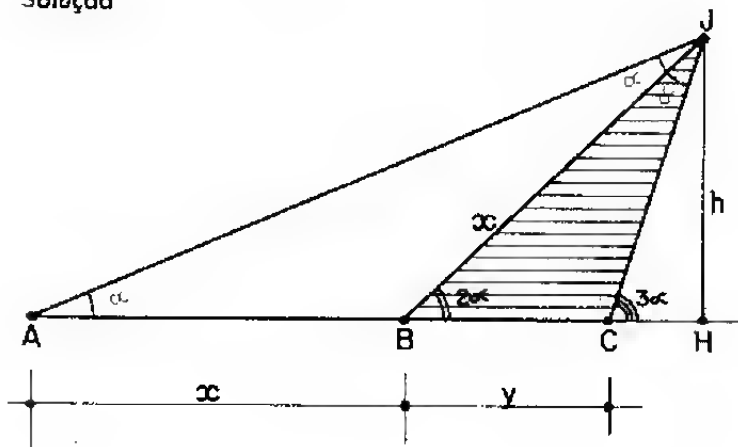
$$\sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C} = \frac{abc}{8R^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{abc}{R^3}$$

$$\text{Logo, } k = \frac{1}{8}$$

$$\text{Resposta: } \frac{1}{8}$$

147. Um observador vê uma torre segunda um ângulo α . Aproxima-se x metros e passa a vê-la sob ângulo 2α . Aproxima-se mais y metros e passa a vê-la sob ângulo 3α . Calcule em metros a altura da torre desprezando a altura do observador.

Solução



Verificamos inicialmente que $\widehat{AJB} = \widehat{BJC} = \alpha$ e que $BJ = x$. Na triângulo JBC a Lei dos Senos fornece

$$\frac{x}{\sin(180 - 3\alpha)} = \frac{y}{\sin \alpha}$$

$$\frac{x}{\sin 3\alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{x - y}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \frac{x - y}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha} *$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = \frac{x - y}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{x - y}{y} \text{ e } \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

* $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cdot \sin \frac{p - q}{2}$.

Do triângulo JBH,

$$h = JB \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow h = x \cdot \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

$$\text{Resposta: } h = x \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

148. Em um triângulo cujos lados medem: $a = 8$, $b = 7$ e $c = 5$ calcule: a) h_a , b) m_c c) β_{ab} .

Solução

$$\left. \begin{array}{l} a = 8 \\ b = 7 \\ c = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow p = 10.$$

$$a) \quad h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_a = \frac{2}{8} \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{2} \sqrt{3}$$

$$b) \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(64 + 49) - 25} = \frac{1}{2} \sqrt{201}.$$

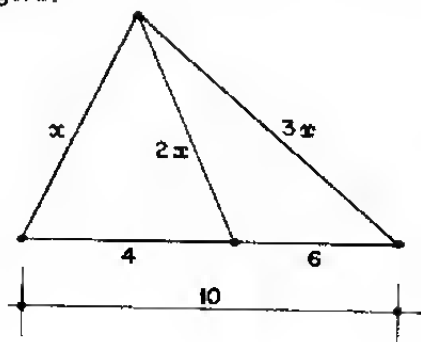
$$e) \quad \beta_{ab} = \frac{2}{|a - c|} \sqrt{ac(p - a)(p - c)}$$

$$\beta_{ab} = \frac{2}{3} \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{40}{3}$$

$$\text{Respostas: } a) \frac{5}{2} \sqrt{3}, \quad b) \frac{1}{2} \sqrt{201}, \quad c) \frac{40}{3}$$

149. Calcule x na figura.

Solução



A relação de Stewart fornece

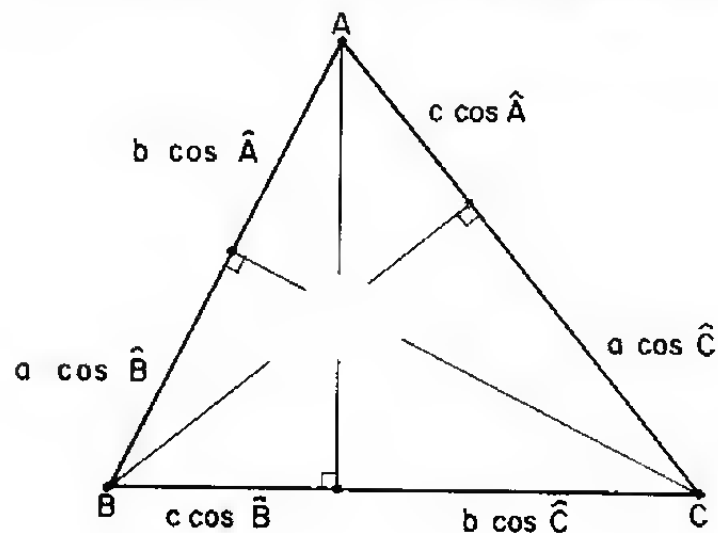
$$x^2 \cdot 6 + 9x^2 \cdot 4 = 4x^2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 10$$

$$2x^2 = 240$$

$$x^2 = 120, \quad x = 2\sqrt{30}$$

Resposta: $2\sqrt{30}$.

150. Demonstre que as três alturas de um triângulo são concorrentes.

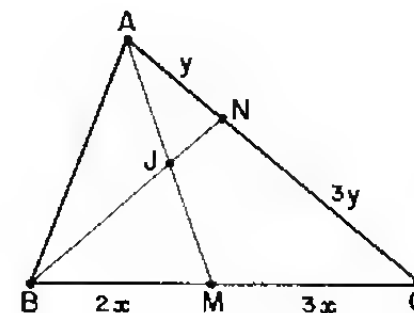


Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{b \cos \hat{A} \cdot c \cos \hat{B} \cdot a \cos \hat{C}}{a \cos \hat{B} \cdot b \cos \hat{C} \cdot c \cos \hat{A}} = 1.$$

151. Na figura abaixo, calcule a razão $\frac{JA}{JM}$.

Solução



Consideremos a triângula AMC e a transversal NJB. Pela teorema de Menelaus,

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \frac{3y}{y} = 1 \implies \frac{JA}{JM} = \frac{5}{6}$$

Resposta: $\frac{5}{6}$.

152. Demonstre que as três medianas de um triângulo são concorrentes.

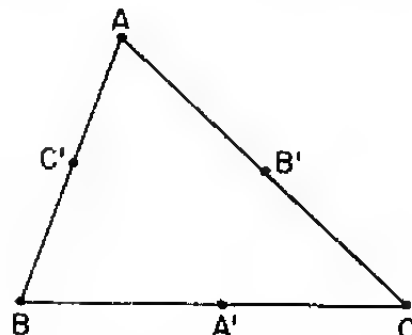
Solução

Como

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = 1$$

pelo teorema de Ceva

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1.$$

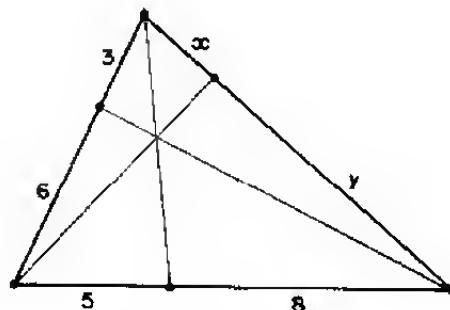


153. Calcule a razão $\frac{x}{y}$ na figura.

Solução

Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot y}{6 \cdot 8 \cdot x} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{16}$$



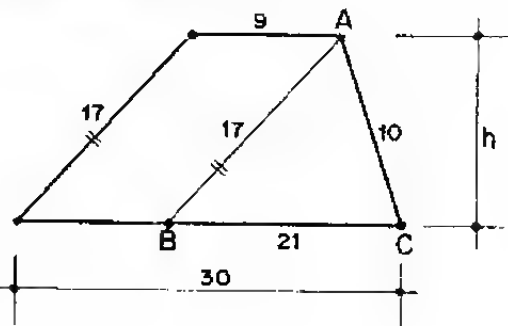
Resposta: $\frac{5}{16}$

154. Calcule a altura de um trapézio cujas bases medem 30 e 9 e cujos lados não paralelos medem 17 e 10.

Solução

Calcularemos a altura do triângulo ABC

$$\left. \begin{array}{l} a = 21 \\ b = 10 \\ c = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow p = 24$$



$$h = \frac{2}{21} \sqrt{24(24-21)(24-10)(24-17)}$$

$$h = \frac{2}{21} \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = \frac{2}{21} \cdot 84 = 8.$$

Resposta: 8

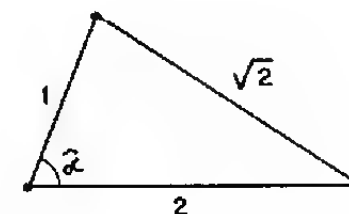
PROBLEMAS PROPOSTOS

155. O triângulo cujos lados medem 20, 29 e 21 é:

- A) obtusângulo C) retângulo
B) isósceles D) acutângulo
E) NRA.

156. Calcule $\cos \hat{\alpha}$ na figura.

- A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$
E) NRA.



157. O triângulo cujos lados medem 56, 33 e 66

- A) tem um ângulo de 30°
B) é acutângulo
C) é retângulo
D) é obtusângulo
E) NRA.

158. Em um triângulo ABC sabe-se que $AC = 7$, $BC = 8$ e $\hat{B} = 60^\circ$. Então, AB mede:

- A) 5 C) 5 ou 3
B) 3 D) 4
E) NRA.

159. Calcule o lado a de um triângulo ABC sabendo que b e c medem 10 e 7 respectivamente e que a projeção de c sobre b mede 0,25.

A) 12
B) 13
C) $\sqrt{143}$
D) $\sqrt{129}$

E) NRA.

160. Calcule o co-seno do ângulo \widehat{A} de um triângulo ABC, onde $BC = 8$, $AC = 7$ e $AB = 5$.

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{7}$.

161. Calcule a tangente do ângulo \widehat{C} de um triângulo ABC, onde $AB = 6$, $AC = 5$ e $BC = 3$.

A) $4\sqrt{14}$
B) $\sqrt{14}$
C) $-4\sqrt{14}$
D) $-\sqrt{14}$

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 162 E 163

Em um triângulo ABC sabemos que $AB = 6$, $\widehat{A} = 60^\circ$ e $\widehat{B} = 45^\circ$.

162. O lado \overline{AC} mede:

A) $6(\sqrt{3} - 1)$
B) $3(\sqrt{3} + 1)$
C) $6(3 - \sqrt{3})$
D) $3 + \sqrt{3}$

E) NRA.

163. A projeção do lado \overline{BC} sobre \overline{AB} mede:

A) $3 + \sqrt{3}$
B) $2(3 - \sqrt{3})$
C) $3(3 - \sqrt{3})$
D) $6(\sqrt{3} + 1)$

E) NRA.

164. Em um triângulo ABC cujos lados medem $BC = 8$, $AC = 6$ e $AB = 4$, considere a ponto M da interior do lado \overline{BC} tal que $CM = 2$. Então, AM mede:

A) 4
B) $\sqrt{17}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{19}$

E) NRA.

165. Considere o triângulo ABC de lados $AB = AC = 6$ e $BC = 4$. Seja M o prolongamento do lado \overline{AC} tal que $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{3}$. Então, BM mede:

A) $\sqrt{30}$
B) $\sqrt{33}$
C) $\sqrt{35}$
D) $\sqrt{37}$

E) NRA.

166. Considere um quadrante AOB de raio R. Um ponto M do arco AB é tal que sua distância ao raio \overline{OB} é a metade da sua distância ao ponto A. Então, MA mede:

A) R
B) $\frac{4}{3}R$
C) $\frac{3}{2}R$
D) $\frac{2}{3}R$

E) NRA.

167. Em relação à figura abaixo, a partir da relação de Stewart é verdadeiro concluir que:

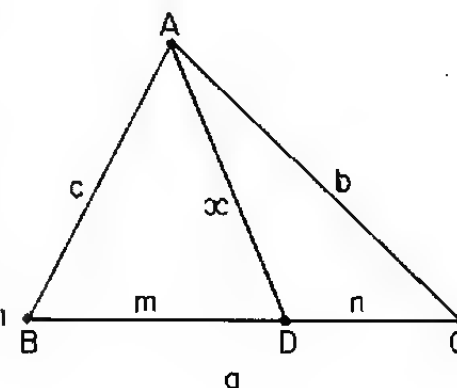
A) $\frac{b^2 + c^2}{m} = \frac{a^2 + x^2}{n}$

B) $\frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{om} = \frac{x^2}{mn}$

C) $\frac{c}{m} + \frac{b}{n} + \frac{x}{a} = 1$

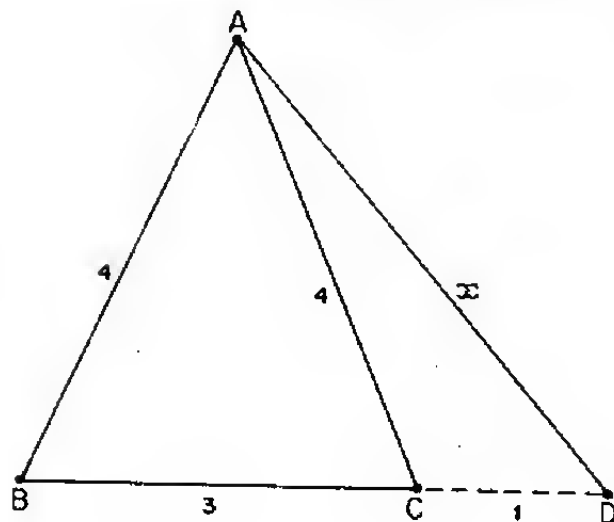
D) $\frac{b^2}{on} + \frac{c^2}{om} - \frac{x^2}{mn} = 1$

E) nada disso.

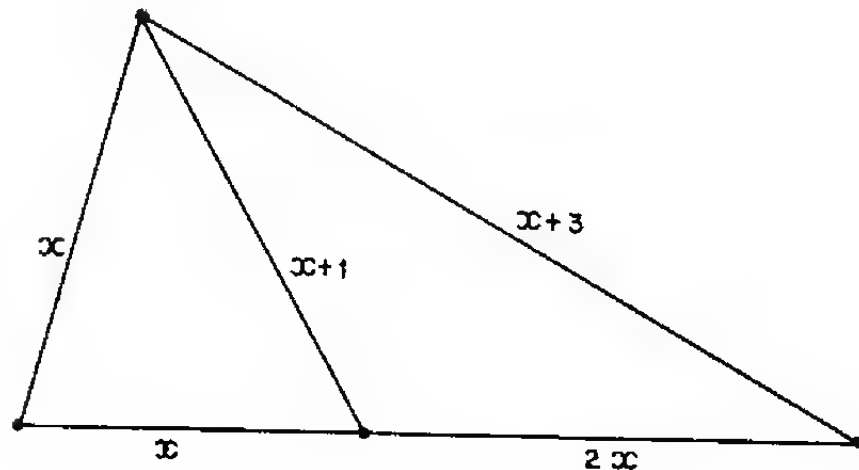


168. Calcule x na figura.

- A) $\sqrt{5}$
 B) $2\sqrt{5}$
 C) $3\sqrt{5}$
 D) $3\sqrt{2}$
 E) NRA.



169. Calcule x na figura.



- A) 1
 B) $\sqrt{2}$
 C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 D) o problema é impossível
 E) NRA.

170. Em um triângulo de lados 5, 7 e 11, a menor mediana tem comprimento igual a:

- A) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
 B) $\frac{3}{2}\sqrt{35}$
 C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
 D) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$
 E) NRA.

171. Em um triângulo cujos lados medem 24, 20 e 16, quantas vezes $\sqrt{7}$ está contida na altura relativa ao maior lado?

- A) 5
 B) 6
 C) 7
 D) 8
 E) NRA.

172. Se os lados de um triângulo medem: $a = 12$, $b = 10$ e $c = 8$, a bissetriz externa relativa ao lado c tem comprimento igual a:

- A) $15\sqrt{2}$
 B) $20\sqrt{2}$
 C) $25\sqrt{2}$
 D) $30\sqrt{2}$
 E) NRA.

173. Se as lados de um triângulo medem: $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, então a razão entre a altura relativa ao lado a e a bissetriz interna relativa ao lado b é:

- A) $\frac{10}{13}$
 B) $\frac{13}{10}$
 C) $\frac{5}{8}$
 D) $\frac{8}{5}$
 E) NRA.

174. Os lados de um triângulo ABC medem: $AB = 13$, $AC = 15$ e $BC = 14$. Se H é o ortocentro do triângulo, então HA mede:

- A) 8
 B) 8,2
 C) 8,25
 D) 8,4
 E) NRA.

175. A soma dos senos dos ângulos de um triângulo é:

A) $\frac{p}{R}$

C) $\frac{p}{2R}$

p = semiperímetro
 R = raio do círculo inscrito.

B) $\frac{2p}{R}$

D) $\frac{2R}{p}$

E) NRA.

176. Os lados de um triângulo ABC são a , b e c . O valor de

$$\frac{\cos \hat{A}}{a} + \frac{\cos \hat{B}}{b} + \frac{\cos \hat{C}}{c}$$

é:

A) $a^2 + b^2 + c^2$

C) $\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

B) $\frac{1}{a + b + c}$

D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

E) NRA.

177. Um triângulo ABC tem lados a , b e c . Se $\hat{B} + 2\hat{A}$, então:

A) $\sin \hat{B} = 2 \sin \hat{A}$

C) $\cos \hat{A} = \frac{b}{2a}$

B) $\sin \hat{A} = \frac{a}{b + c}$

D) $\sin \hat{C} = \sin \hat{A} + \sin \hat{B}$

E) NRA.

178. Na figura abaixo, $\frac{JA}{JM}$ vale:

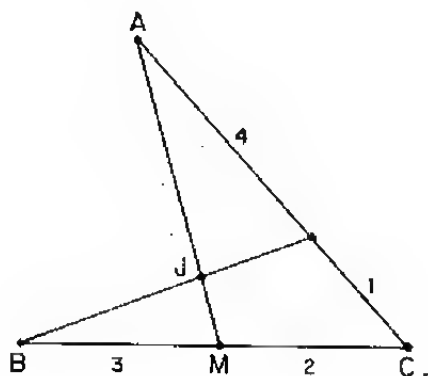
A) 4

B) 5

C) $\frac{16}{3}$

D) $\frac{20}{3}$

E) NRA.



179. Calcule x na figura.

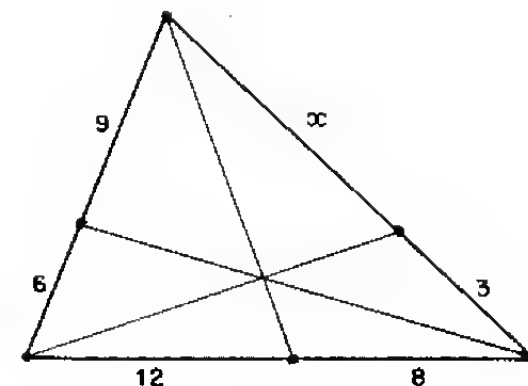
A) 6

B) 6,5

C) 6,75

D) 9

E) NRA.



180. Calcule x na figura, sendo:

AB = 6

AC = 8

BC = 10

MA = 6

NA = 2

PB = x

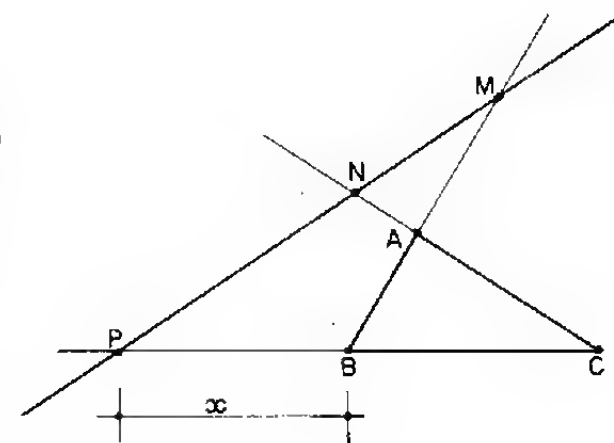
A) 10

B) $\frac{20}{3}$

C) $\frac{25}{3}$

D) 15

E) NRA.



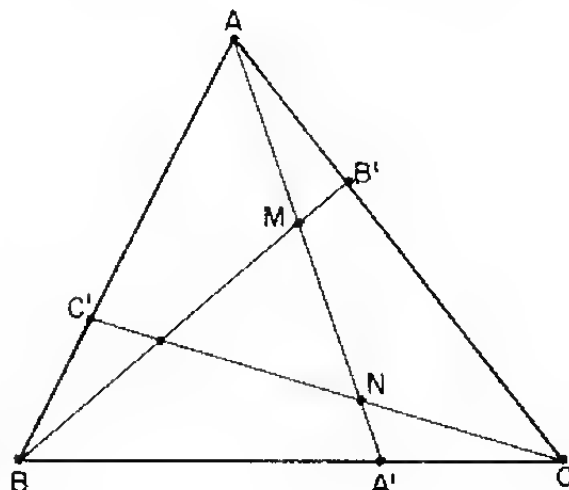
181. Na figura abaixo,

$$A'C = \frac{1}{3} BC,$$

$$B'A = \frac{1}{3} CA \text{ e}$$

$$C'B = \frac{1}{3} AB.$$

A razão $\frac{MN}{AA'}$ é:



A) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{7}$

B) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{5}{9}$

182. Se G é o baricentro de um triângulo ABC, demonstre que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

183. Dado um triângulo isósceles ABC de base \overline{BC} e um ponto D qualquer de sua base, prove que

$$AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC.$$

184. Determine o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante e igual a k^2 .

185. Seja ABCD um retângulo. Prove que para um ponto P qualquer

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

186. Seja ABCD um retângulo de centro O. Prove que, se um ponto P varia sobre um círculo de centro O,

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

permanece constante.

187. São dados dois círculos concêntricos. De um ponto P variável da circunferência exterior trocam-se \overline{PA} e \overline{PB} , sendo A e B extremos de um diâmetro do círculo interior. Mostre que $PA^2 + PB^2$ é constante.

188. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $PA^2 + 3PB^2 = k^2$, k constante.

189. Sendo M e N os pontos que dividem em três segmentos congruentes a hipotenusa \overline{BC} de um triângulo retângulo ABC, demonstre que

$$AM^2 + AN^2 + MN^2 = \frac{2}{3} BC^2.$$

190. Determinar o lugar geométrico dos pontos cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B é constante e igual a k^2 .

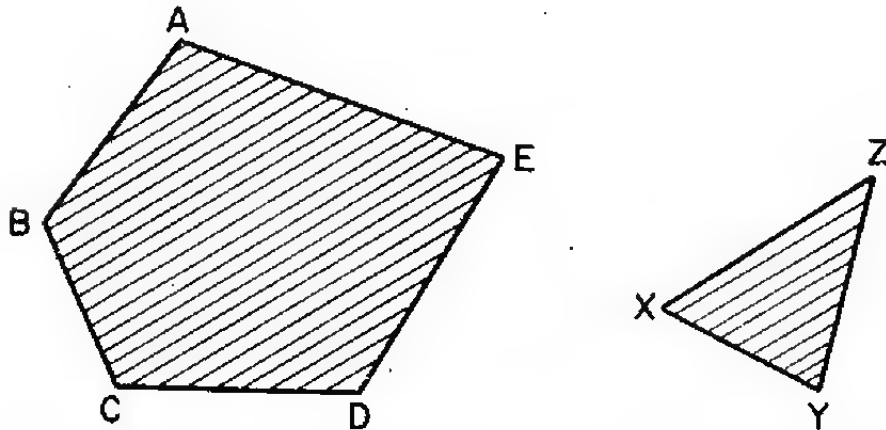
CAPÍTULO 6

ÁREAS

INTRODUÇÃO

6.1 — DEFINIÇÕES

Estudamos até agora nas figuras geométricas a sua forma, as medidas de seus ângulos e os comprimentos dos segmentos que as compõem, assim como relações entre eles. Vamos agora estudar a extensão* das superfícies limitadas pelas figuras. Na figura abaixo, notamos que a superfície do pentágono ABCDE é claramente maior que a do triângulo XYZ.



Duas figuras se chamam EQUIVALENTES se possuem igual extensão, independente de suas formas. Imagine o leitor que, depois de recortarmos em uma mesma folha de papel duas figuras quaisquer

* A extensão é um conceito primitivo.

A e B, vamos pesá-las em uma balança de precisão. Se encontrarmos pesos iguais, é porque a extensão de suas superfícies é a mesma, sendo as figuras, portanto, equivalentes. Escreveremos, neste caso,

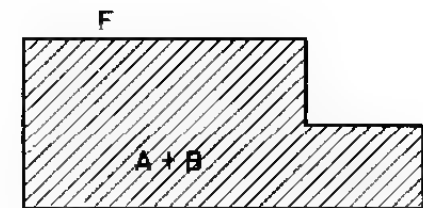
$$A \approx B.$$

Se o peso de A for maior que o de B, então a superfície de A é maior que a de B e escreveremos

$$A > B.$$

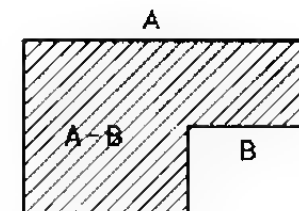
Sejam A e B duas figuras tais que sua interseção seja vazia ou sejam apenas pontos de seus cantornos. A reunião de suas superfícies se chama soma das referidas figuras. Assim,

$$F = A + B.$$



Se B está contido em A, definiremos diferença entre estas figuras a superfície formada pelos pontos de A que não pertencem a B. Se A e B são os retângulos da figura ao lado, e F é a figura hachurada, então

$$F = A - B.$$



6.2 — AXIOMAS

A 1 — Duas figuras congruentes são equivalentes

$$A \equiv B \implies A \approx B.$$

A 2 — A equivalência goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

$$\text{i)} \quad A \approx A$$

$$\text{ii)} \quad A \approx B \iff B \approx A$$

$$\text{iii)} \quad \left. \begin{array}{l} A \approx B \\ B \approx C \end{array} \right\} \Rightarrow A \approx C.$$

A 3 — As somas (ou diferenças) de figuras equivalentes são equivalentes.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \approx A_2 \\ B_1 \approx B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 + B_1 \approx A_2 + B_2$$

6.3 — TEOREMA

Se duas figuras podem ser divididas em igual número de outras respectivamente congruentes, então são equivalentes.

Realmente, se F_1 pode ser dividida nas partes A_1, B_1, C_1, \dots e se F_2 pode ser dividida nas partes A_2, B_2, C_2, \dots , e se

$$A_1 \equiv A_2$$

$$B_1 \equiv B_2$$

$$C_1 \equiv C_2$$

.....

..... temos

como

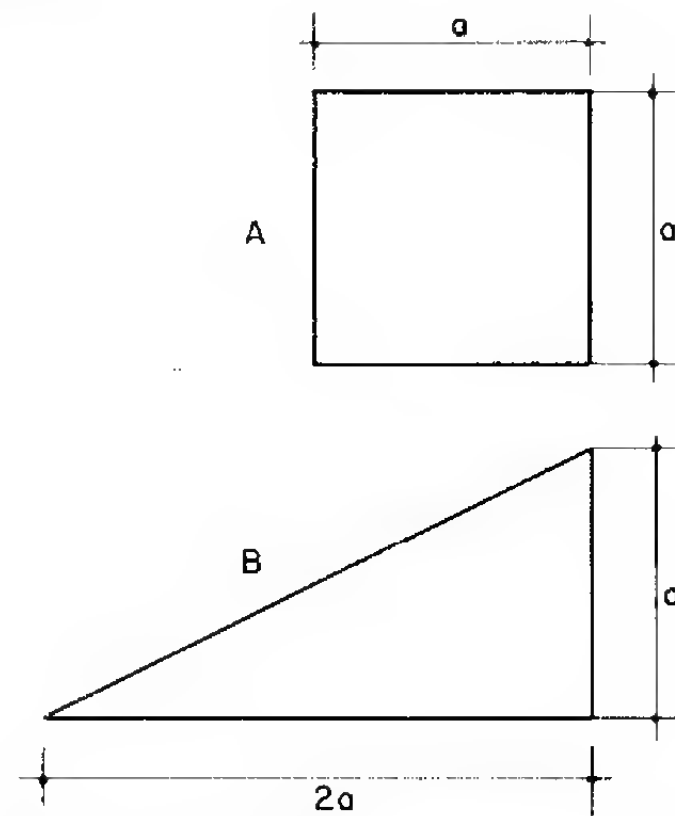
$$F_1 = A_1 + B_1 + C_1 + \dots \quad \text{e}$$

$$F_2 = A_2 + B_2 + C_2 + \dots$$

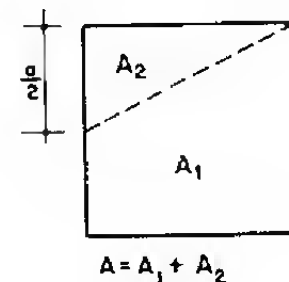
por 7.2 — A1 e A3 concluímos que

$$F_1 \approx F_2$$

Exemplo

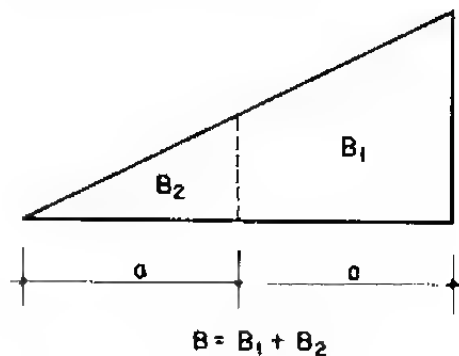


Sejam A um quadrado de lado a e B um triângulo retângulo de catetos a e $2a$.



Dividamos o quadrado em duas partes A_1 e A_2 , como mostra a figura.

Dividimos também o triângulo em duas partes B_1 e B_2 , como mostra a figura.



Verificamos imediatamente que:

$$A_1 \equiv B_1 \quad e$$

$$A_2 \equiv B_2$$

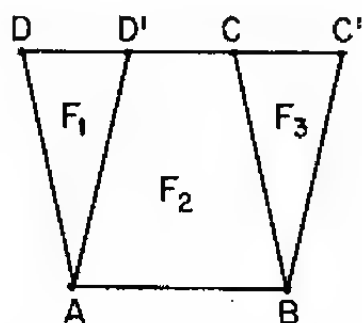
Logo, podemos concluir que

$$A \approx B.$$

6.4 — TEOREMA

Dois paralelogramos de bases e alturas congruentes são equivalentes.

1.º caso — \overline{CD} e $\overline{C'D'}$ têm um segmento ou um ponto comum



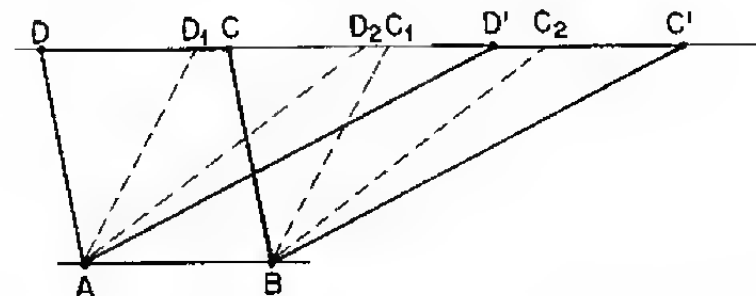
$$ABCD = F_1 + F_2$$

$$ABC'D' = F_2 + F_3$$

Como $F_1 \approx F_2$ e $F_1 \approx F_3$,

$$ABCD \approx ABC'D'$$

2.º caso — \overline{CD} e $\overline{C'D'}$ não têm ponto comum.

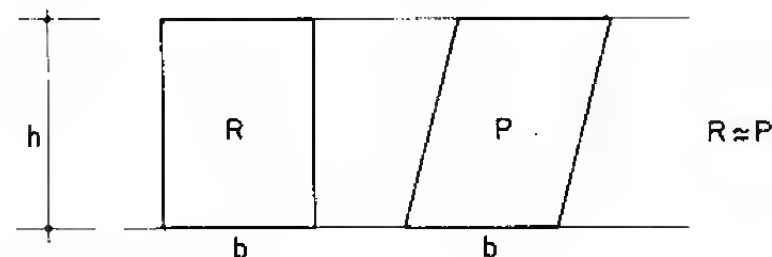


Considerando tantos paralelogramos intermediários quantos necessários, temos

$$ABCD \approx ABC_1D_1 \approx ABC_2D_2 \approx ABC'D'$$

6.5 — OBSERVAÇÃO

Em vista do demonstrado em 7.5, podemos afirmar que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e altura.



6.6 — ÁREA DE UMA FIGURA

Vamos associar a toda superfície limitada um número real positiva ou nulo

$$A \mapsto S(A)$$

Assim, a uma figura A foi associado um número $S(A)$ (área de A) tal que:

- 1) Duas figuras equivalentes possuem áreas iguais

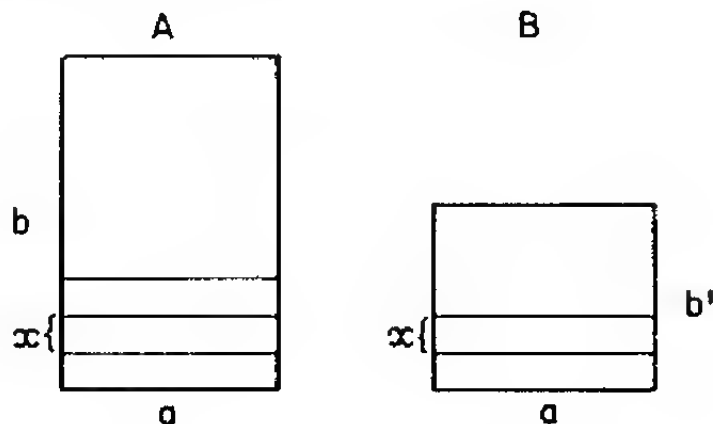
$$A \approx B \implies S(A) = S(B)$$

- 2) A área de uma figura composta de várias partes é a soma das áreas dessas partes.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \implies S(A) = S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots$$

6.7 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes é a razão entre suas alturas



Sejam b e b' comensuráveis. Logo, existe um número x que "cabe" um número inteiro de vezes em b e em b' . Temos então

$$\begin{aligned} b &= mx \\ b' &= hx \end{aligned} \implies \frac{b}{b'} = \frac{m}{n} \quad (I)$$

Podemos, então, dividir A e B em retângulos congruentes de base a e altura x . Se s é a área de cada um deles, temos

$$\begin{aligned} S(A) &= ms \\ S(B) &= ns \end{aligned} \implies \frac{S(A)}{S(B)} = \frac{m}{n} \quad (II)$$

Por I e II, temos

$$\frac{S(A)}{S(B)} = \frac{b}{b'}$$

Se b e b' não forem comensuráveis, chegaremos a idêntica resultada, pois x pode ser tão pequeno quanto se queira. Assim, podemos dizer que

"A razão entre as áreas de dois retângulos que possuem uma dimensão congruente é a razão entre as dimensões não congruentes."

6.8 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos é a razão entre os produtos de suas dimensões.

Sejam

retângulos	dimensões	área
A	a_1, b_1	$s(A)$
B	a_2, b_2	$s(B)$

consideremos

C	a_1, b_2	$s(C)$
---	------------	--------

Por 7.8, podemos escrever

$$\frac{S(A)}{S(C)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2}$$

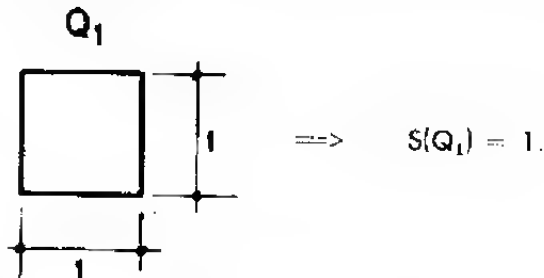
Multiplicando,

$$\frac{S(A)}{S(C)} \cdot \frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S(A)}{S(B)} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$$

6.9 — UNIDADE DE ÁREA

Devemos considerar a superfície de extensão unitária. Esta é arbitrária, como acontece com qualquer unidade. Consideraremos, então, como nossa unidade de área a área do quadrado de lado unitário



6.10 — ÁREA DO RETÂNGULO

Sejam

retângulos	dimensões	área
R	a , b	s
Q_1	1 , 1	1

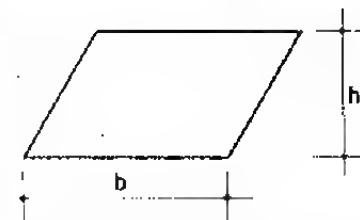
Por 7.9, temos

$$\frac{S}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} \Rightarrow S = ab$$

6.11 — ÁREA DO PARALELOGRAMO

Consideremos um paralelograma de base b , altura h e área S . Tendo em vista o demonstrado em 7.5 e 7.6, concluímos

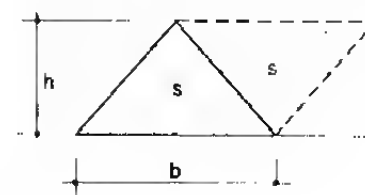
$$S = b \cdot h$$



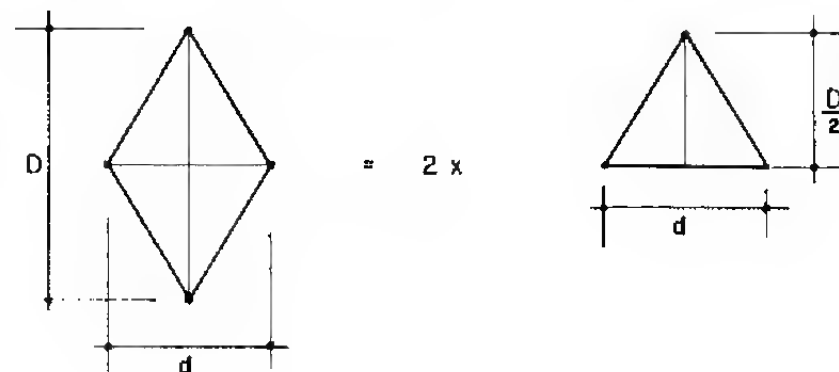
6.12 — ÁREA DO TRIÂNGULO

Consideremos um paralelogramo de base b , altura h e área $2S$, e o triângulo formado por dois lados consecutivos e uma diagonal, como mostra a figura. Naturalmente que S é a área de cada um dos triângulos congruentes em que o paralelogramo ficou dividido. Assim,

$$2S = bh \Rightarrow S = \frac{bh}{2}$$



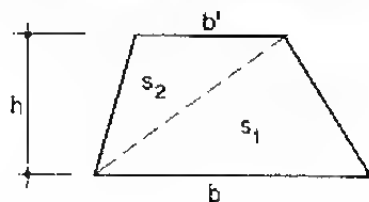
6.13 — ÁREA DO LOSANGO



Seja S a área de um losango de diagonais D e d . Temos então

$$S = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{D \cdot d}{2}}$$

6.14 — ÁREA DO TRAPÉZIO



Seja S a área de um trapézio de bases b e b' e altura h . Por meio de uma diagonal, dividimos o trapézio em dois triângulos de áreas S_1 e S_2 . Então,

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{bh}{2} + \frac{b'h}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{S = \frac{b + b'}{2} \cdot h}$$

$$\text{ou simplesmente} \Rightarrow$$

$$\boxed{S = b_m \cdot h}$$

6.15 — ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

Sejam

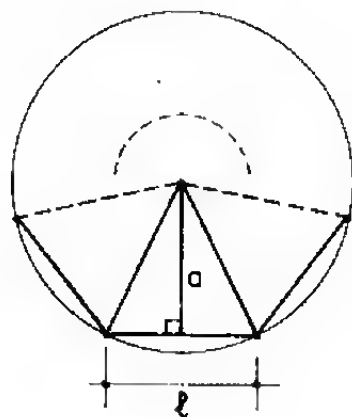
S = área da polígono regular

l = medida da lado

a = medido do apótema

n = número de lados

p = semiperímetro do polígono



Como a polígono pode ser dividida em n triângulos congruentes de base l e altura a , temos

$$S' = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

Mos $n \cdot l$ é o perímetro do polígono; logo,

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} \Rightarrow \boxed{S = pa}$$

6.16 — ÁREA DO CÍRCULO

Seja S a área de um círculo de raio R e seja S_p a área de um polígono regular de n lados nele inscrito.

$$\text{Se } n \rightarrow \infty, \text{ então } \begin{cases} P \rightarrow \pi R^* \\ a \rightarrow R \\ S_p \rightarrow S \end{cases}$$

Assim,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_p = \lim_{n \rightarrow \infty} pa = \pi R \cdot R = \pi R. \text{ Então,}$$

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

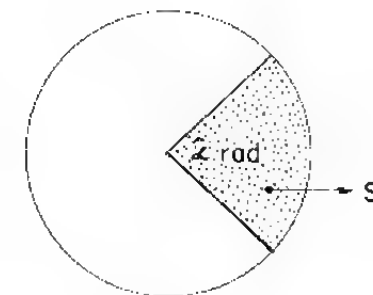
6.17 — ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR

Como a área da seta varia linearmente com a ângula central,

$$S = m\alpha. \text{ Mas}$$

$$\text{se } \alpha = 2\pi \text{ rad, } S = \pi R^2. \text{ Logo,}$$

$$\pi R^2 = m 2\pi \Rightarrow m = \frac{R^2}{2}$$

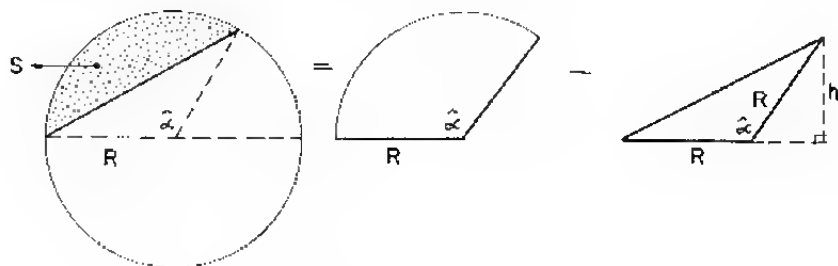


* O comprimento do círculo é dado em função do raio por $C = 2\pi R$, onde π é uma constante aproximadamente igual a 3,1416.

Assim,

$$S = \frac{\widehat{\alpha} R^2}{2}$$

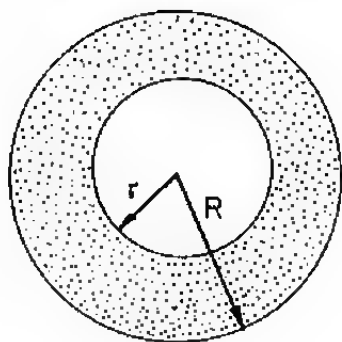
6.18 — ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR



$$S = \frac{\widehat{\alpha} R^2}{2} - \frac{R \cdot R \sin \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{R^2}{2} (\widehat{\alpha} - \sin \widehat{\alpha}) \quad \widehat{\alpha} \text{ em rd.}$$

6.19 — ÁREA DA COROA CIRCULAR



$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$



$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

6.20 — ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS

Consideremos um triângulo de área S , lados a , b e c e alturas h_a , h_b , h_c .

$$S = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$$

Sabemos que

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ sendo } p \text{ seu semiperímetro.}$$

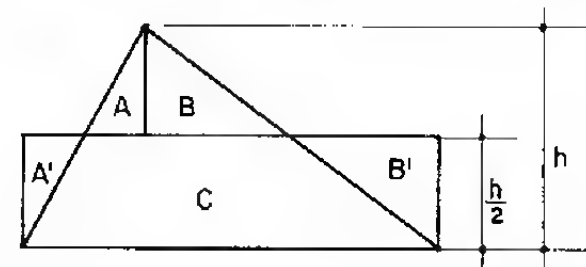
Multiplicando por $\frac{a}{2}$ vem

$$\frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}^*$$

6.21 — TEOREMA

Um triângulo é equivalente a um retângulo de mesma base que a do triângulo e altura igual à metade da do triângulo.



* Este radical é conhecido como "radical de Heron". Heron — séc. I d.C.

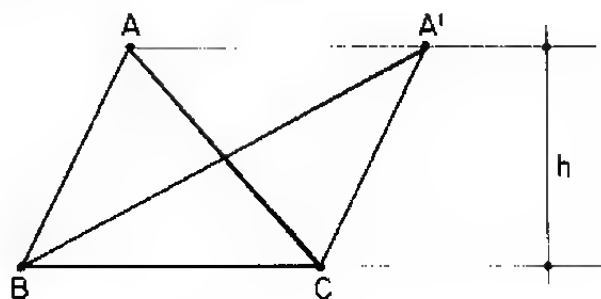
$$T = A + B + C$$

$$R = A' + B' + C \quad \text{mas}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \approx A' \\ B \approx B' \\ C \approx C \end{array} \right\} \Rightarrow T \approx R$$

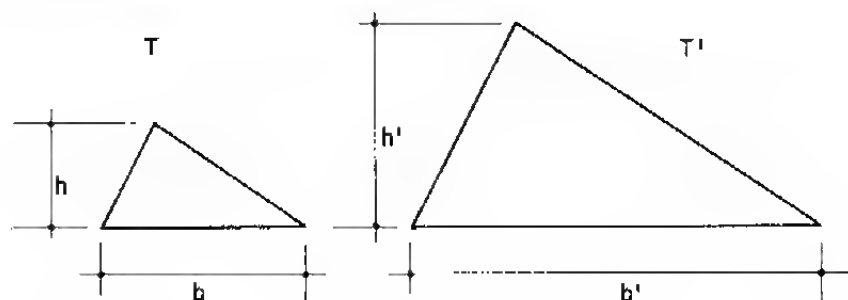
Daí concluímos que

Dois triângulos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes



$$S(ABC) = S(A'BC)$$

6.22 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES



Sejam

$$S(T) = S$$

$$S(T') = S'$$

$$\text{Se } T \sim T' \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k \quad (\text{razão de semelhança}).$$

Então,

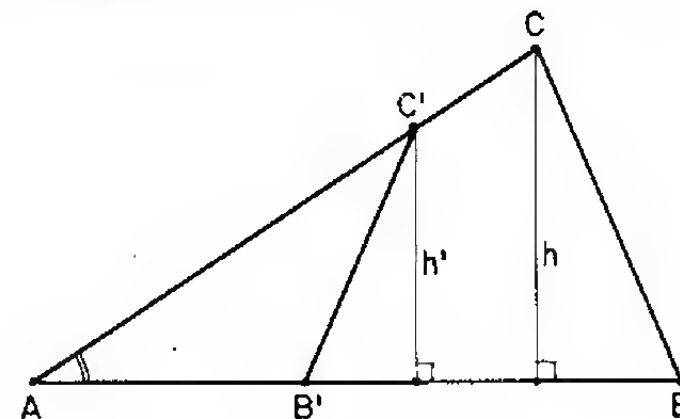
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} b h}{\frac{1}{2} b' h'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

Portanto, a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Estendemos facilmente esta conclusão para polígonos e demais figuras semelhantes.

6.23 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS QUE POSSUEM UM ÂNGULO COMUM



Consideremos os triângulos ABC e $AB'C'$ da figura que possuem o ângulo \widehat{A} em comum. Sejam S e S' suas áreas e h e h' as alturas traçadas de C e C' , respectivamente. Temos então

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \quad S' = \frac{AB' \cdot h'}{2}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{h}{h'}$$

Mas $\frac{h}{h'} = \frac{AC}{AC'}$. Logo,

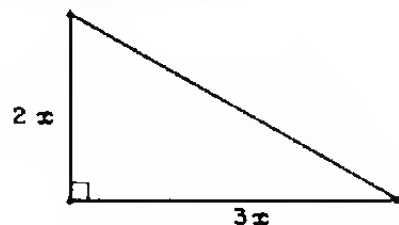
$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}$$

A razão entre as áreas de dois triângulos que possuem um ângulo comum é a razão entre os produtos dos lados que em cada triângulo formam esse ângulo.

6.24 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

101. Calcule as catetos de um triângulo retângulo de área igual a 108 ua^2 sabendo que são proporcionais a 2 e 3.

Solução



$$108 = \frac{2x \cdot 3x}{2} \Rightarrow$$

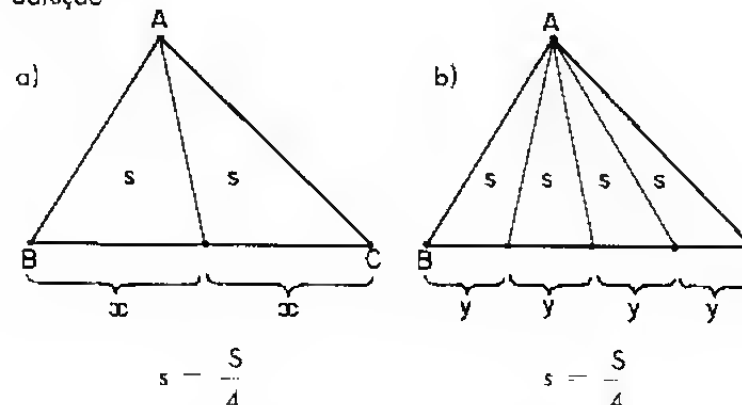
$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6.$$

Resposta: 12 e 18.

192. Dividir um triângulo ABC

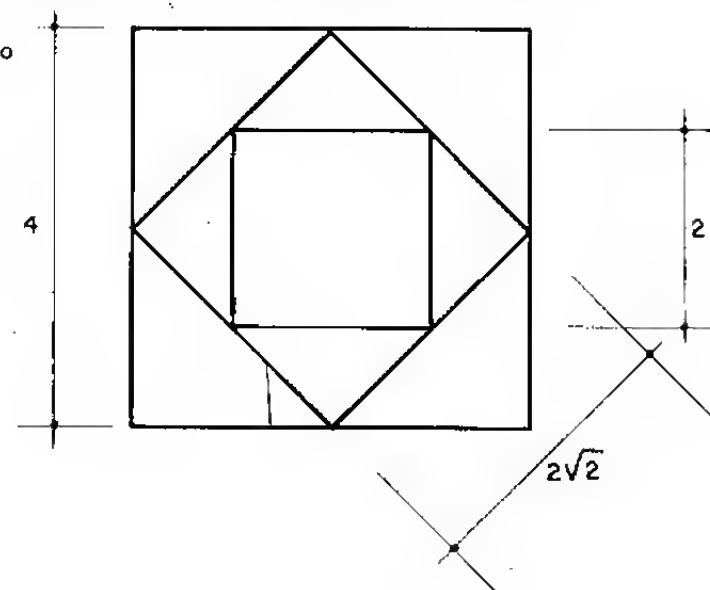
- em duas partes equivalentes por uma ceviana
- em quatro partes equivalentes por meio de três cevianas.

Solução



193. Considere um quadrado de lado a , um segundo quadrado cujos vértices são os pontos médios do primeiro, um terceiro formado pelos pontos médios do segundo e assim sucessivamente. Calcule o limite da soma das áreas dos quadrados.

Solução



* Unidades de área.

lados áreas

$$4 \qquad 16$$

$$2\sqrt{2} \qquad 8$$

$$2 \qquad 4$$

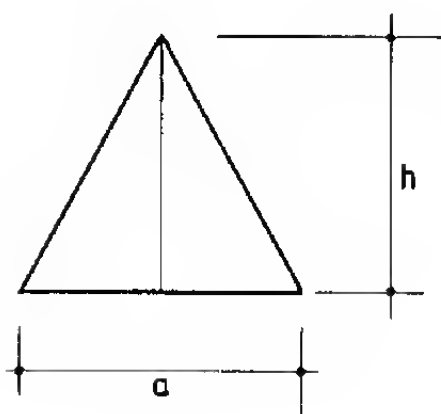
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lim S = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$$

Resposta: 32 ua

194. Calcule a área de um triângulo equilátero de lado a .

Solução



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{ah}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

195. Sendo equilátero o triângulo da figura, calcule a área assinalada.

Solução

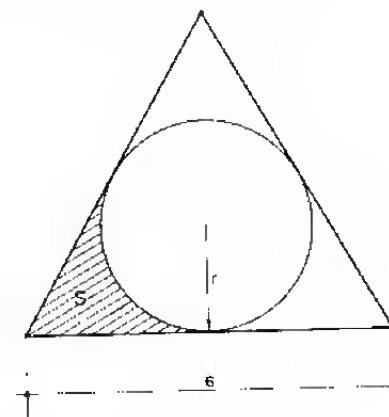
$$S = \frac{\Delta - O}{3}$$

$$S_{\Delta} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_O = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

$$S = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi$$



Resposta: $3\sqrt{3} - \pi$ ua

196. Calcule a área de um losango de perímetro 40 sabendo que uma diagonal é o dobro da outra.

Solução

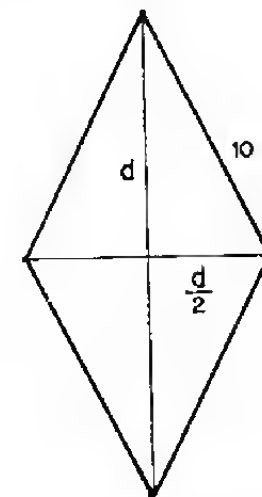
$$D = 2d$$

$$S = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2$$

$$100 = d^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{5d^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 80 \Rightarrow$$

$$S = 80$$



Resposta: 80

197. Um triângulo de altura h é dividido por uma reta paralela à base em duas partes equivalentes. Calcule a distância desta reta ao vértice.

Solução

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

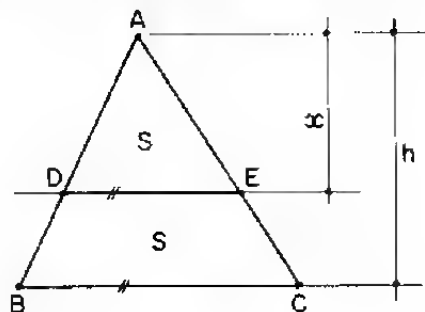
razão de semelhança

$k = \frac{x}{h}$. Sabemos que a razão entre as áreas é a quadrada da razão de semelhança. Então,

$$\frac{S}{2S} = \frac{x^2}{h^2}$$

$$x^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$



198. A figura abaixo mostra um quadrado e seu círculo circunscrito. Se a área assinalada é igual a $\pi - 2$, calcule o lado do quadrado.

Solução

$$S = \text{quadrante} - \text{triângulo}$$

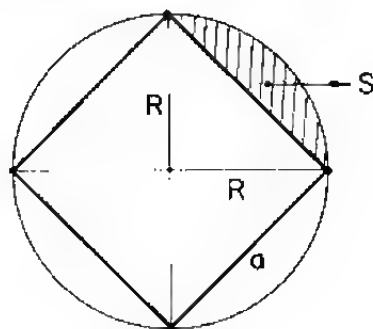
$$\pi - 2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R \cdot R}{2}$$

$$\pi - 2 = \frac{R^2}{4} (\pi - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2.$$

$$\text{O lado do quadrado será } a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Resposta: $2\sqrt{2}$



199. Num triângulo isósceles ABC , $AB = AC = a$. Calcule sua área sabendo que é máxima.

Solução

Seja h a altura relativa ao lado AC . Então,

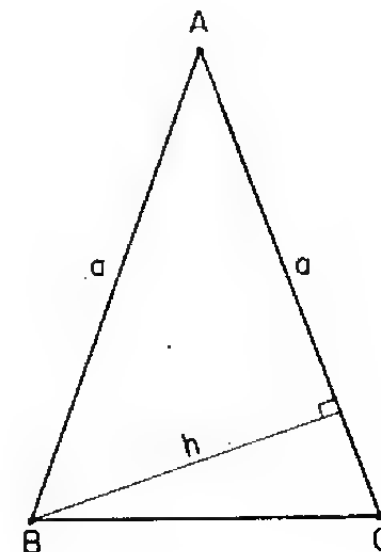
$$h = a \sin \hat{A} \text{ e}$$

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a \sin \hat{A}}{2}$$

A área será máxima se $\sin \hat{A} = 1 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$. Então,

$$S = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: $\frac{a^2}{2}$



200. IME - 65.

Divida a área de um círculo de raio R em n partes equivalentes por meio de círculos concêntricos de raios $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_{n-1}$. Estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i .

Solução

A área de cada parte será

$$s = \frac{\pi R^2}{n}$$

Como o círculo r_i está dividido em i partes equivalentes,

$$\pi r_i^2 = i \frac{\pi R^2}{n} \Rightarrow r_i = R \sqrt{\frac{i}{n}}$$

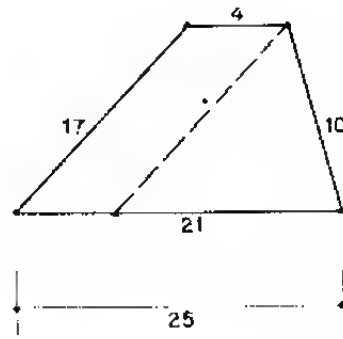
Resposta: $R \sqrt{\frac{i}{n}}$

201. Calcule o área do trapézio de bases 25 e 4 e lados não paralelos 17 e 10.

Solução

Calculemos a altura do trapézio.

Traçando por um dos vértices da base menor uma paralelo a um dos lados oblíquos, formamos um triângulo de lados 17, 10 e 21. Sua altura será:



$$\left. \begin{array}{l} a = 21 \\ b = 17 \\ c = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow p = 24$$

$$h_o = \frac{2}{21} \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 8$$

Então, a área do trapézio será

$$S = \frac{25 + 4}{2} \cdot 8 = 116$$

Resposta: 116 ua

202. Calcule a área do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 6

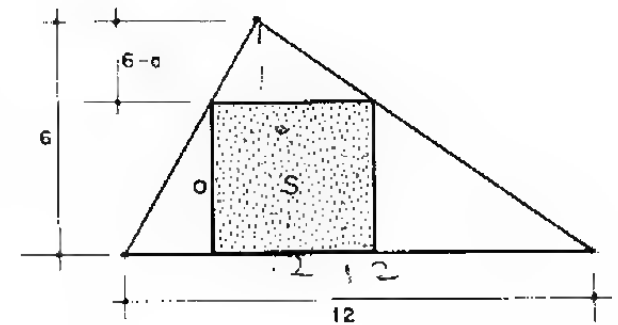
Solução

$$\frac{a}{12} = \frac{6-a}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4.$$

Então,

$$S = 4^2 = 16$$



Resposta: 16 ua

203. O perímetro de um triângulo isósceles é $2p$. Calcule o área desse triângulo.

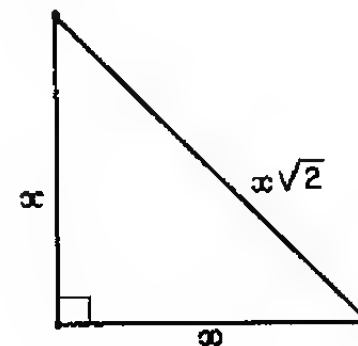
Solução

$$x + x + x\sqrt{2} = 2p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = p(2 - \sqrt{2})$$

$$S = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{p^2(2 - \sqrt{2})^2}{2}$$

$$S = p^2(3 - 2\sqrt{2}).$$



Resposta: $p^2(3 - 2\sqrt{2})$.

204. Em um círculo de raio R , \overline{AB} é um diâmetro e \overline{AC} uma corda que faz 15° com esse diâmetro. Calcule a área do menor das segmentas circulares determinadas pelo cordo \overline{AC} .

Solução

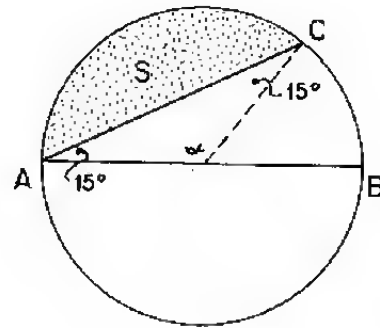
$$x = \frac{R^2}{2} (\hat{\alpha} - \text{sen } \hat{\alpha}) \text{ v. 6.18}$$

$$\hat{\alpha} = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{R^2}{2} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \right)$$

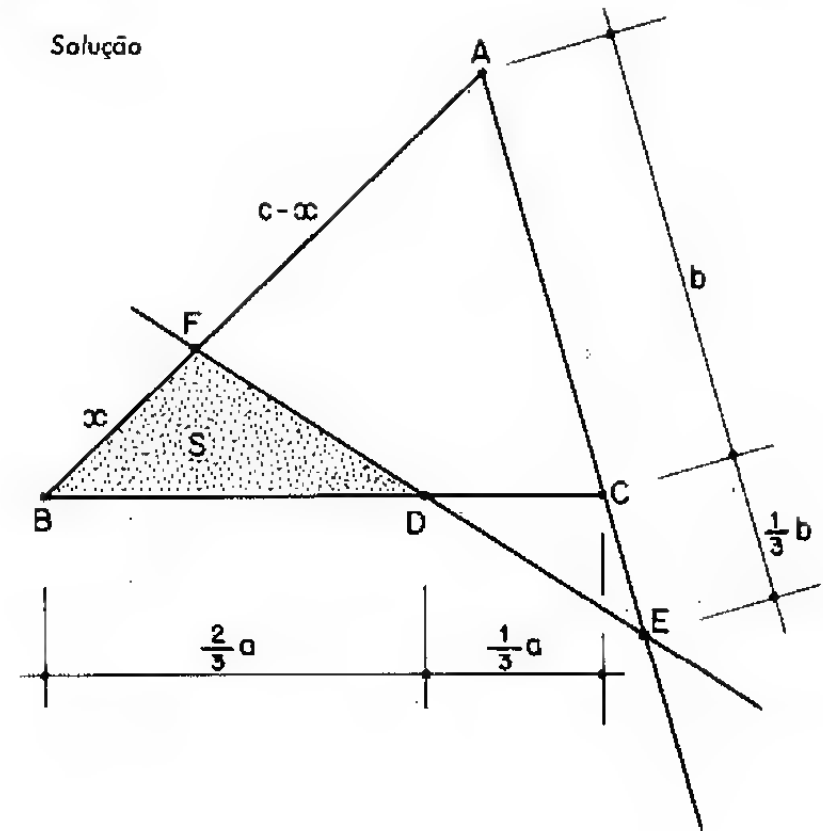
$$S = \frac{R^2}{12} (5\pi - 3)$$



Resposta: $\frac{R^2}{12} (5\pi - 3).$

205. O triângulo ABC de lados a , b e c da figura tem área igual a 36 ua. Se $DC = \frac{a}{3}$ e $CE = \frac{b}{3}$, calcule o área do triângulo BDF.

Solução



Pela teorema de Menelaus,

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c-x}{x} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{c}{3}$$

Como BDF e BCA têm o ângulo \hat{B} em comum,

$$\frac{S}{36} = \frac{BF \cdot BD}{BA \cdot BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 8 \text{ ua}$$

Resposta: 8 ua

PROBLEMAS PROPOSTOS

206. Calcule a área do retângulo de perímetro igual a 14 sabendo que sua diagonal mede 5.

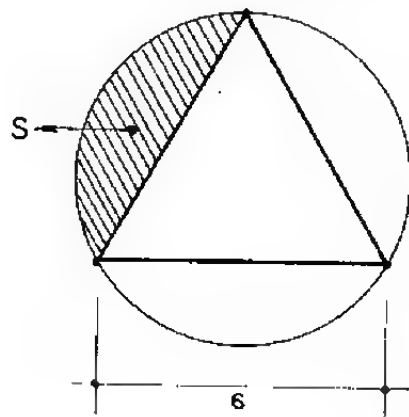
- A) 6
B) 8
C) 12
D) 16
E) NRA.

207. Os lados de um paralelogramo medem 10 e $6\sqrt{3}$. Se esses lados formam 60° , sua área mede:

- A) 90
B) 120
C) 60
D) 75
E) NRA.

208. A figura abaixo representa um triângulo equilátero de lado 6 e seu círculo circunscrito. A área assinalada mede:

- A) $2\pi - \sqrt{3}$
B) $3\pi - 2\sqrt{3}$
C) $4\pi - 3\sqrt{3}$
D) $12\pi - 9\sqrt{3}$
E) NRA.



209. Dois triângulos são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual a 3. A razão entre suas áreas é:

- A) 3
B) 6
C) 9
D) 27
E) NRA.

210. Dois círculos de centros A e B e raios R e 4R são tangentes externamente. Uma reta é tangente em C e D aos dois círculos. A área do quadrilátero ABCD é:

- A) $4R^2$
B) $5R^2$
C) $8R^2$
D) $10R^2$
E) NRA.

211. Calcule o perímetro de um losango em que uma diagonal mede 10 equivalente a um quadrado de lado igual a 5.

- A) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$
B) $5\sqrt{5}$
C) $10\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{10}$
E) NRA.

212. Considere dois círculos concêntricos de raios R e 2R e centro O. Considere uma corda AB do círculo maior tangente ao círculo menor. Se a área do setor AOB é $k\pi R^2$, k vale:

- A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{3}{2}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$
E) NRA.

213. Se o raio de um círculo é multiplicado por 2,5, a sua área fica multiplicada por:

- A) 5
B) 10
C) 25
D) 125
E) NRA.

214. A área de um triângulo retângulo em que um cateto mede 45 e a hipotenusa 53 é:

- A) 1.260
B) 930
C) 760
D) 630
E) NRA.

215. Em um trapézio isósceles de bases 10 e 6, as diagonais são perpendiculares às ladas oblíquas às bases. A área desse trapézio é:

A) 32 C) 24
B) 28 D) 20

E) NRA.

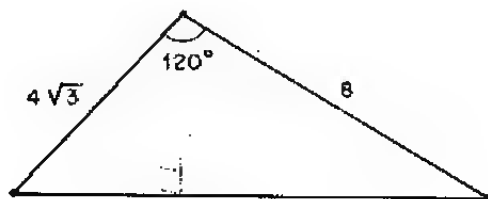
216. O círculo inscrita em um setor de 60° e raio R tem área kR^2 , onde k vale:

A) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{10}$
B) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{4}{15}$

E) $\frac{1}{9}$

217. A área da triângulo da figura é:

A) 12
B) 18
C) 20
D) 30
E) NRA.



218. Um trapézio retângulo de bases 9 e 4 tem diagonais perpendiculares. Sua área é:

A) 26 C) 52
B) 39 D) 78

E) NRA.

219. A área de um círculo inscrito em um triângulo equilátero é 36π . A altura desse triângulo mede:

A) 6 C) 18
B) 12 D) 24

E) NRA.

220. Se o raio de um círculo aumenta de 10%, sua área aumenta de:

A) 10% C) 21%
B) 20% D) 100%

E) NRA.

221. A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 8 é:

A) $64\sqrt{3}$ C) $84\sqrt{3}$
B) $72\sqrt{3}$ D) $96\sqrt{3}$

E) NRA.

222. Os catetos de um triângulo retângulo medem 16 e 30. A área do círculo circunscrito a esse triângulo é:

A) 174π C) 289π
B) 211π D) 316π

E) NRA.

223. O lado de certa quadrada aumenta de 30%. Sua área então aumenta de:

A) 15% C) 60%
B) 30% D) 69%

E) 27%

224. A área de um segmento circular de raio R e ângulo central de 60° é:

A) $\frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{6} (2\pi - \sqrt{3})$
B) $\frac{R^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12} (\pi - \sqrt{3})$

E) NRA.

225. A área de um setor circular de raio R e ângulo central de 30° é:

A) $\frac{R^2}{12} (\pi - 6)$ C) $\frac{R^2}{12} (\pi - 3)$
B) $\frac{R^2}{6} (\pi - 3)$ D) $\frac{R^2}{6} (\pi - 3)$

E) NRA.

226. A razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{5}$

E) NRA.

227. A área de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio r é:

A) $\frac{5}{2} r^2$

C) $3\sqrt{3} \pi r^2$

B) $3\sqrt{3} r^2$

D) $\pi\sqrt{3} r^2$

E) NRA.

228. A razão entre as áreas dos triângulos equiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{5}$

229. A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito e de um hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{3}{8}$

230. Um dos lados oblíquos de um trapézio mede a e a distância do ponto médio do lado oposto a este lado é x . A área do trapézio é:

A) $\frac{ax}{2}$

C) $2ax$

B) ax

D) indeterminado

E) NRA.

231. No quadrilátero qualquer ABCD, P é meio de AD e M é meio de BC. Se a área de ABCD é 18, a área do quadrilátero APCM é:

A) 6

C) 12

B) 9

D) indeterminado

E) NRA.

232. Considere um paralelograma ABCD de lados $AB = 12$ e $BC = 4\sqrt{3}$. Se um dos ângulos desse paralelograma mede 60° , calcule a área do losango inscrito de forma que uma diagonal seja formada pelos pontos médios dos lados AD e BC.

A) 18

C) 30

B) 24

D) 36

E) NRA.

233. Considere um trapézio de bases a e b ($a > b$) e altura h . Calcule a área do triângulo de base a formado pelos prolongamentos dos lados não paralelos.

A) $\frac{b^2 h}{a - b}$

C) $\frac{a^2 h}{2(a - b)}$

B) $\frac{a^2 h}{a - b}$

D) $\frac{b^2 h}{a + b}$

E) NRA.

234. Seja P um ponto interior a um triângulo ABC. Se os triângulos PAB, PBC e PCA são equivalentes, então P é o:

A) circuncentro

C) baricentro

B) incentro

D) ortocentro

E) NRA.

235. Um retângulo está inscrito em um círculo de raio igual a 6. Se um de seus lados mede 9, sua área mede:

A) $7\sqrt{7}$ C) $21\sqrt{7}$
B) $14\sqrt{7}$ D) $27\sqrt{7}$

E) NRA.

236. Um triângulo ABC tem área igual a 18. Pelo baricentro do triângulo traça-se uma paralela a BC que determina em AB e AC os pontos M e N. A área do triângulo AMN é:

A) 6 C) 8
B) 7 D) 9

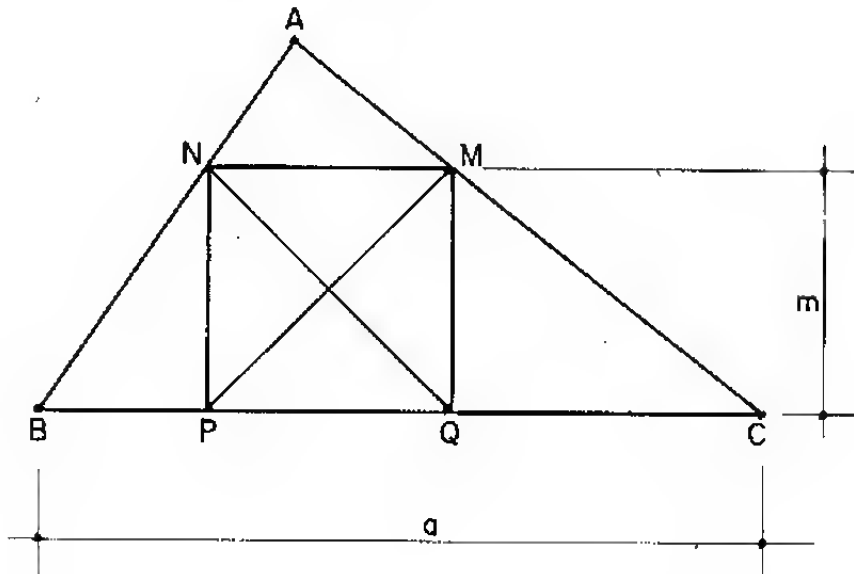
E) 10

237. Um retângulo de área igual a 24 está inscrito em um triângulo de base 9 e altura 12. A maior dimensão que esse retângulo pode ter é:

A) 6 C) 8
B) 7,5 D) 9

E) NRA.

238. Na figura abaixo, MNPQ é um quadrado. A soma das áreas dos triângulos NQB e MPC é:



A) $m(a + m)$ C) $m(2a - m)$
B) $2m(a - m)$ D) $\frac{m}{2}(a + m)$

E) NRA.

239. Em um losango de área igual a 12, a distância entre dois lados opostos é 4. O perímetro desse losango é:

A) 24 C) 30
B) 26 D) 36

E) NRA.

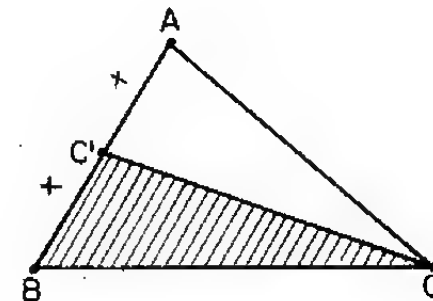
ENUNCIADO PARA AS QUESTÕES 240 A 245

Nas figuras 240 a 245 o triângulo ABC tem área S, sendo $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ medianas. Calcule a área assinalada.

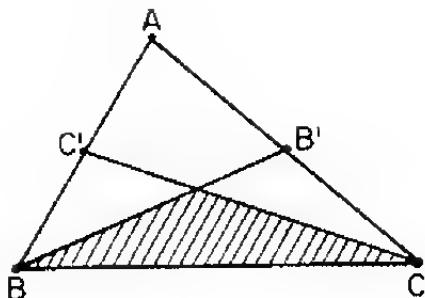
OPÇÕES PARA AS QUESTÕES 240 A 245

A) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{4}$
B) $\frac{S}{3}$ D) $\frac{S}{6}$
E) $\frac{S}{12}$

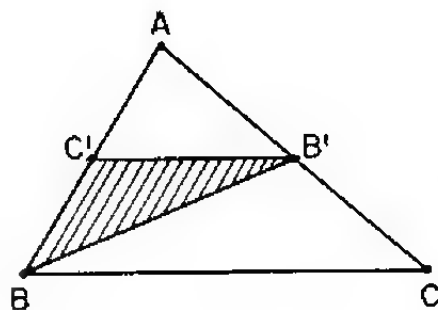
240.



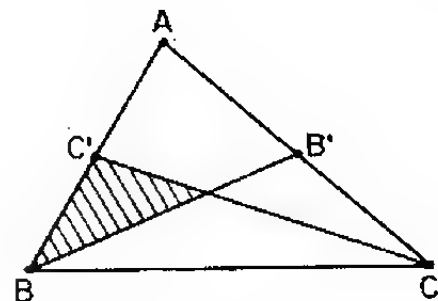
241.



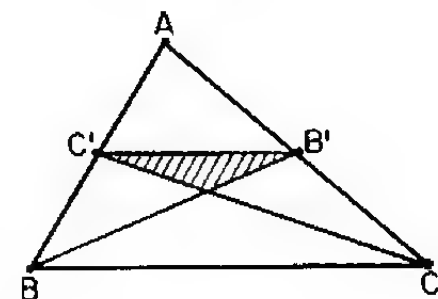
242.



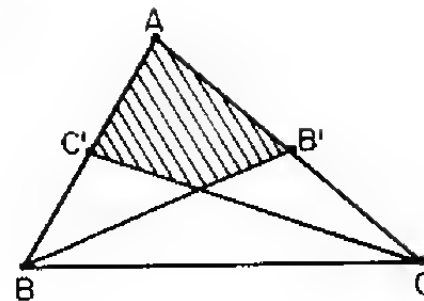
243.



244.



245.



246. Calcule a área assinalada.

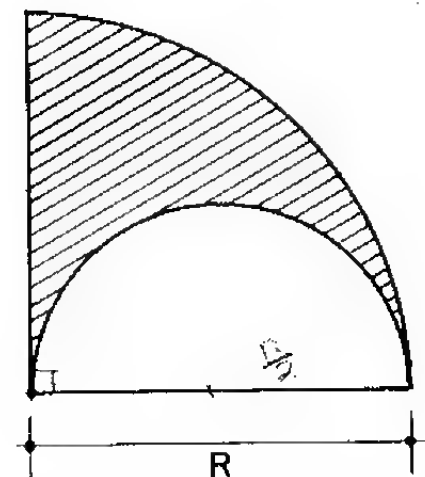
A) $\frac{\pi R^2}{4}$

B) $\frac{\pi R^2}{8}$

C) $\frac{\pi R^2}{16}$

D) $\frac{\pi R^2}{32}$

E) NRA.



247. Considere um triângulo equilátero de lado a onde foram traçados três círculos de raios $\frac{a}{2}$, com centro nos vértices. Calcule a área exterior aos círculos e interior ao triângulo equilátero.

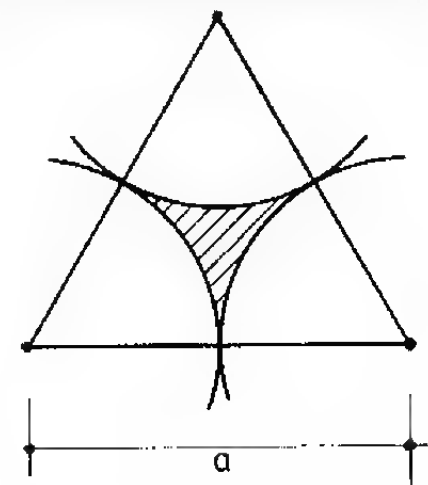
A) $\frac{a^2}{2} (2\sqrt{3} - \pi)$

B) $\frac{a^2}{4} (\pi - \sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} - \pi)$

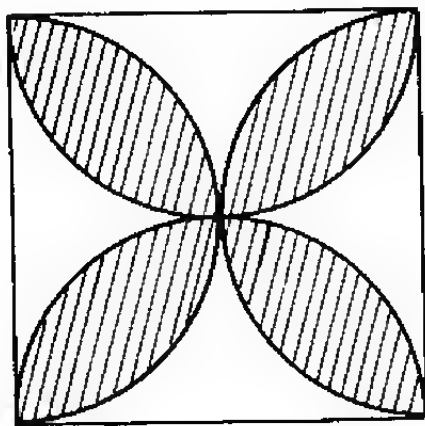
D) $\frac{a^2}{8} (2\sqrt{3} - \pi)$

E) NRA.



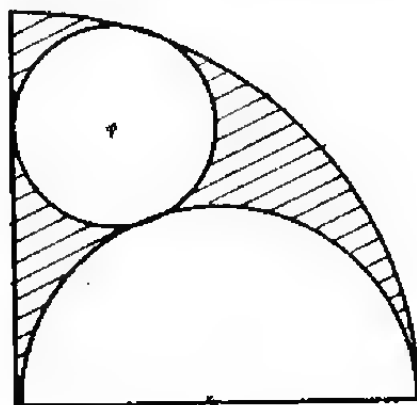
248. Considere um quadrado de lado a e a figura abaixo. Calcule a área assinalada.

- A) $a^2(\pi - 2)$
 B) $\frac{a^2}{2}(2\pi - 1)$
 C) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$
 D) $2a^2(\pi - 1)$
 E) NRA.



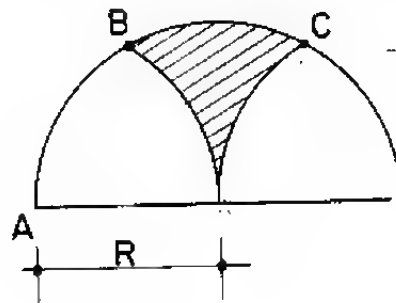
249. Considere o quadrante de raio R da figura. Calcule a área assinalada.

- A) $\frac{\pi R^2}{8}$
 B) $\frac{\pi R^2}{12}$
 C) $\frac{5\pi R^2}{24}$
 D) $\frac{\pi R^2}{16}$
 E) NRA.



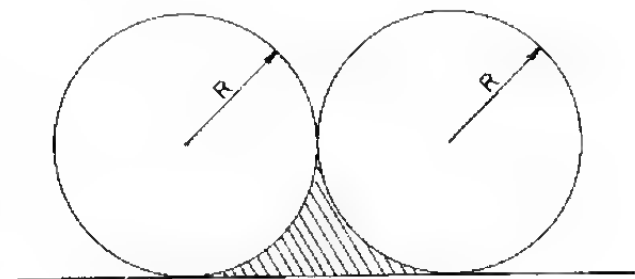
250. Na figura abaixo, $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{OB} = \widehat{OC} = 60^\circ$. Calcule a área assinalada.

- A) $\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$
 B) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$
 C) $R^2(3\sqrt{3} - 2\pi)$
 D) $R^2(\pi - \sqrt{3})$
 E) NRA.



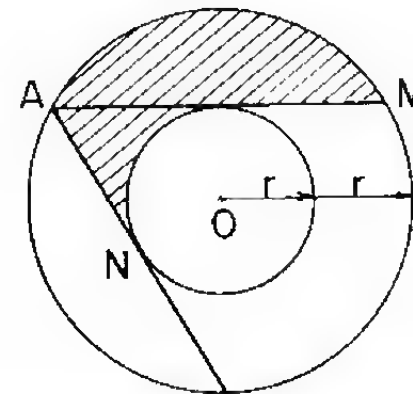
251. Calcule a área assinalada.

- A) $R^2(\pi - 2)$
 B) $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$
 C) $\frac{R^2}{2}(4 - \pi)$
 D) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi)$
 E) NRA.



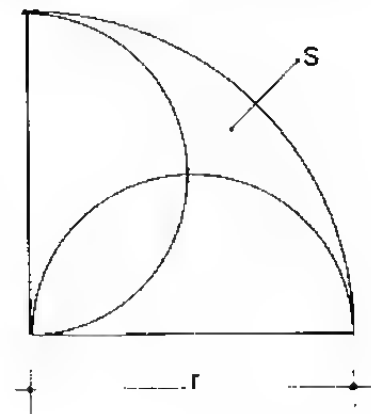
252. (IME - 67) Calcule a área assinalada em função de r .

- A) πr^2
 B) $\frac{\pi r^2}{2}$
 C) $\frac{2\pi r^2}{3}$
 D) $2\pi r^2$
 E) NRA.



253. Calcule a área S da figura em função do raio r da quadrante.

- A) $r^2(\pi - 2)$
 B) $\frac{r^2}{2}(\pi - 2)$
 C) $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$
 D) $\frac{r^2}{8}(\pi - 2)$
 E) NRA.



254. (CICE — 70) Na figura abaixo, r é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente AB comum aos dois círculos menores. Então, a área assinalada compreendida entre o círculo maior e os dois menores é:

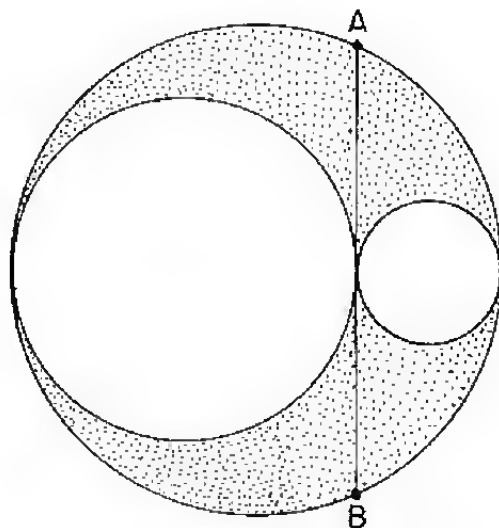
A) $\frac{\pi r^2}{8}$

B) $\frac{\pi r t}{8}$

C) $\frac{\pi t^2}{8}$

D) $\frac{\pi (t - r)^2}{8}$

E) nada disso.



255. (CICE — 70) Considere um triângulo equilátero DEF inscrito em um triângulo equilátero ABC de modo que as lados de DEF sejam respectivamente perpendiculares aos lados de ABC. Então, a área do triângulo DEF é:

A) $\frac{1}{4}$ da área de ABC

C) $\frac{1}{5}$ da área de ABC

B) $\frac{1}{3}$ da área de ABC

D) $\frac{1}{2}$ da área de ABC

E) nada disso.

256. (CICE — 68) A altura de um triângulo equilátero T tem comprimento igual ao lado de um triângulo equilátero S. Se a área de T é 30, a de S é:

A) 40

C) $30\sqrt{3}$

B) $40\sqrt{3}$

D) $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

E) NRA.

257. (CICE — 68) Seja p o perímetro e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. A área desse triângulo é:

A) $S = h \cdot p$

B) $S = \frac{1}{2} hp^2$

C) $S = h^2 + p^2$

D) $S = \frac{hp^2}{4(h+p)}$

E) $S = \frac{h^2 + p^2}{h+p}$

258. Calcule a área do círculo inscrita em um quadrante de raio r .

A) $r^2(\sqrt{2} - 1)$

C) $r^2(3 - 2\sqrt{2})$

B) $r^2(\sqrt{2} + 1)$

D) $r^2(3 + 2\sqrt{2})$

E) NRA.

259. Considere duas cordas paralelas de um semicírculo de raio 6 que determinam neste semicírculo arcos de 60° e 120° . Calcule a área da figura limitada por essas cordas e pela semicírculo

A) 3π

C) $\frac{9}{2}\pi$

B) 4π

D) 6π

E) NRA.

260. Dado um triângulo de altura h , considere duas paralelas à base que o dividam em três partes equivalentes. Calcule em função de h as distâncias destas retas ao vértice do triângulo.

A) $\frac{1}{3}h$ e $\frac{2}{3}h$

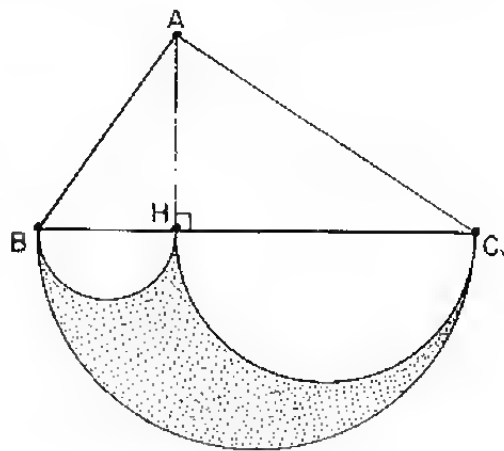
C) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$

B) $\frac{h\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{6}$

261. (CICE — JUL. — 70) Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo e H é a projeção de A sobre a hipotenusa. Construem-se semicírculos sobre BC, BH e HC. A região assinalada tem área igual à:



- A) da quadrada de lado AH
B) da disco de diâmetro AH
C) da disco de raio AH
D) da triângulo ABC
E) NRA.

262. Na figura abaixo, I é a incentra da triângulo ABC e DE, IF e IG são paralelos a BC, AB e AC, respectivamente. Se $AB = 8$, $AC = 10$ e $BC = 10$, a razão entre as áreas dos triângulos ADE e IFG é:

- A) 2
B) $\frac{3}{2}$
C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{9}{2}$
E) $\frac{9}{4}$

263. (CICE — JUL. — 70) Se o ângulo A de um triângulo ABC é igual ao ângulo A' de A'B'C', então:

- A) $\frac{\text{área de ABC}}{\text{área de A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$
B) $\frac{\text{área de ABC}}{\text{área de A'B'C'}} = \frac{\sin B \cdot \sin C'}{\sin B' \cdot \sin C}$
C) $\frac{\text{área de ABC}}{\text{área de A'B'C'}} = \frac{AC^2}{A'C'^2}$

D) $\frac{\text{área de ABC}}{\text{área de A'B'C'}} = \frac{\text{perímetro de ABC}}{\text{perímetro de A'B'C'}}$

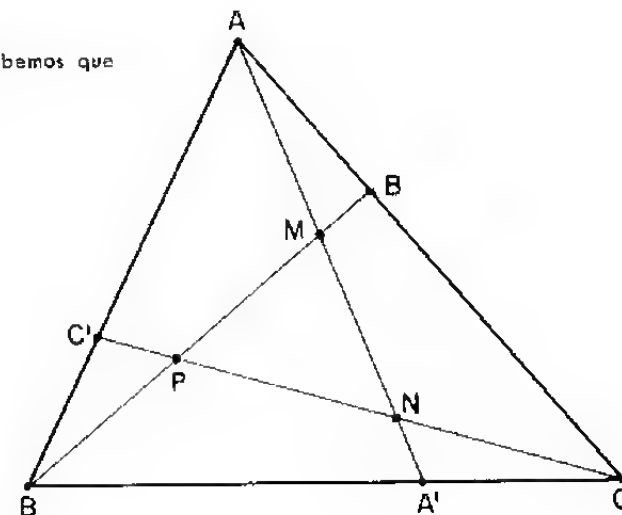
E) NRA.

264. Na figura abaixo, sabemos que

$$CA' = \frac{1}{3} CB$$

$$AB' = \frac{1}{3} AB$$

$$BC' = \frac{1}{3} BA$$



A razão entre as áreas dos triângulos MNP e ABC é:

A) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{7}$

E) $\frac{1}{9}$

265. Considere um quadrilátero ABCD de área S. O quadrilátero cujos vértices são as pantas médios dos lados do quadrilátero ABCD tem área:

A) $\frac{S}{2}$

C) $\frac{S}{4}$

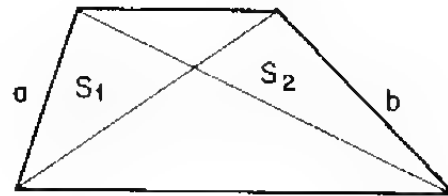
B) $\frac{S}{3}$

D) indeterminada

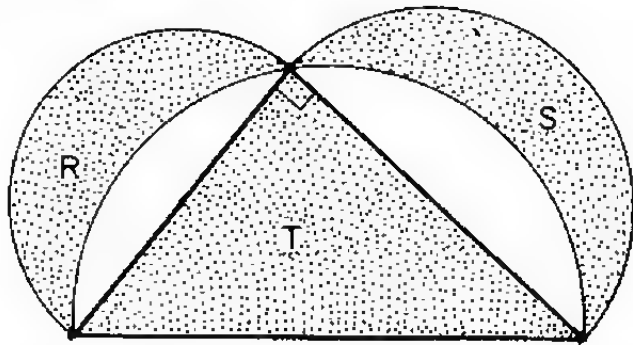
E) NRA.

266. Considere a trapézia da figura. Então:

- A) $S_1 < S_2$ se $a < b$
- B) $S_1 > S_2$ se $a < b$
- C) $S_1 = S_2$ se e só se $a = b$
- D) $S = S_2$
- E) NRA.

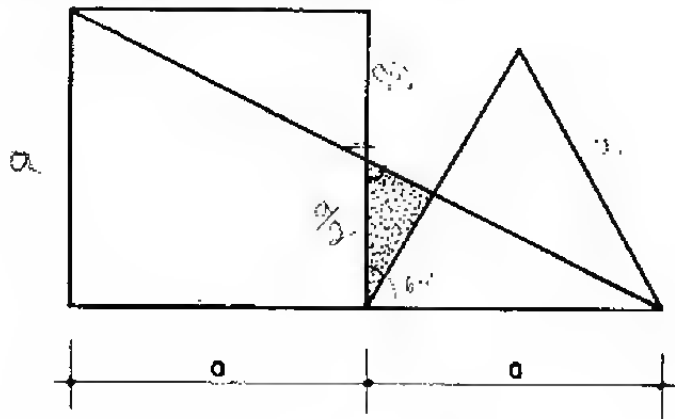


267. Construem-se semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo, como mostra a figura. Prove que $R + S = T$.



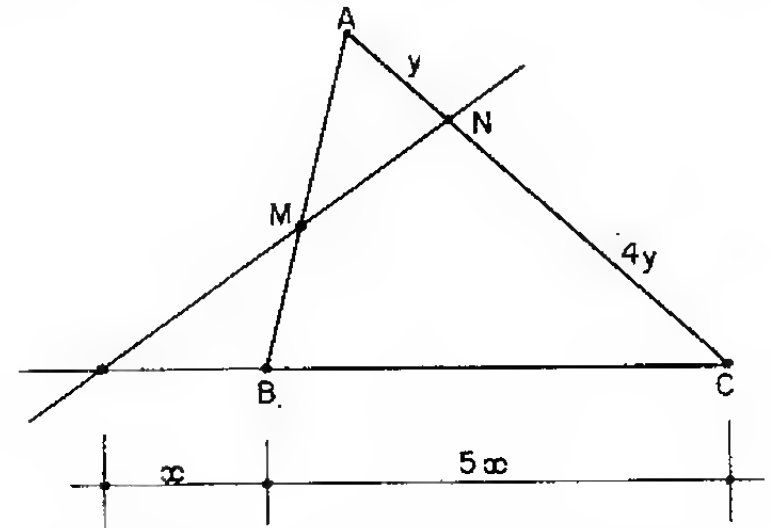
268. É dada um triângulo retângulo ABC de catetos $AB = a$ e $AC = 2a$. Por M, meio de AC , traçam-se MN perpendicular a AC e MP bissetriz de \widehat{NMC} . Calcule a área da triângulo MNP.

269. Considere um quadrado e um triângulo equilátero de mesmo lado a , como mostra a figura. Calcule a área assinalada.



270. Calcule, em função das bases a e b de um trapézia, o comprimento da segmento da paralela às bases que divide a trapézia em duas outras equivalentes.

271. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos AMN e ABC.



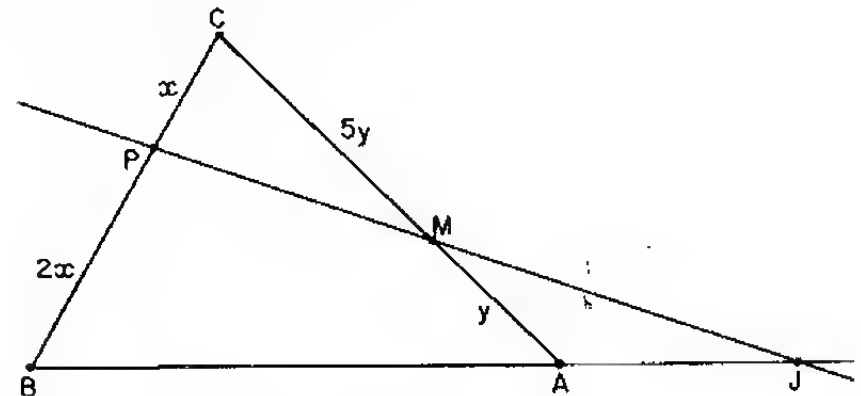
ENUNCIADO RELATIVO AOS PROBLEMAS 272, 273 e 274

Na figura abaixo, sendo S a área da triângulo ABC, calcule:

272. A área da triângulo CPM.

273. A área do quadrilátero PMA.

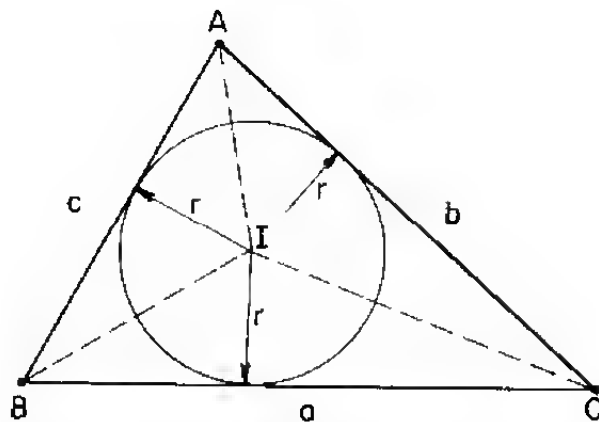
274. A área da triângulo SAM.



CAPÍTULO 7

O TRIÂNGULO E SEUS CÍRCULOS

7.1 — O CÍRCULO INSCRITO



Seja S a área do triângulo ABC , de lados a , b e c . Sendo I o incentro, temos

$$S = S(BCI) + S(ACI) + S(ABI) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \Rightarrow$$

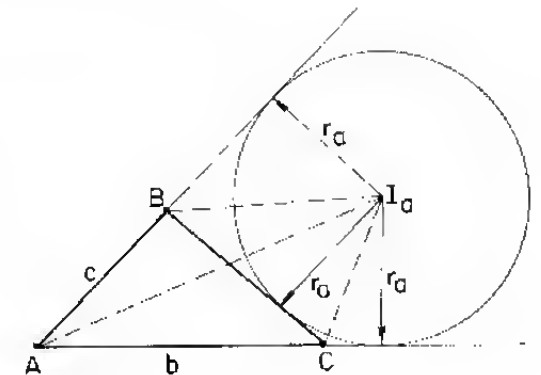
$$\Rightarrow S = \frac{(a+b+c)r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2p \cdot r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = pr}$$

7.2 — OS CÍRCULOS EXINSCRITOS

Consideremos o círculo exinscrito relativo ao lado a no triângulo ABC da figura.



Se S é a área do triângulo ABC , temos

$$S = S(ACI_a) + S(ABI_a) - S(BCI_a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{c \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(b+c-a) \cdot r_a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2(p-a) \cdot r_a}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= r_a(p-a) \\ S &= r_b(p-b) \\ S &= r_c(p-c) \end{aligned}}$$

e, analogamente,

7.3 — RELAÇÕES PRINCIPAIS

7.3.1 — Sabemos que

$$S = pr$$

$$S = r_a(p-a)$$

$$S = r_b(p-b)$$

$$S = r_c(p-c).$$

Multiplicando, temos

$$S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p \underbrace{(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

7.3.2 — Temos, ainda,

$$p - a = \frac{S}{r_a}$$

$$p - b = \frac{S}{r_b}$$

$$p - c = \frac{S}{r_c} \quad \text{Somando, temos}$$

$$3p - \underbrace{(a+b+c)}_{2p} = S \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{S} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad \text{Mas } \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Logo,

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}$$

7.3.3 — O raio do círculo inscrito no triângulo pode ser calculado em função das alturas, como se segue:

$$2s = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow$$

$$a = \frac{2s}{h_a} \quad (1)$$

$$b = \frac{2s}{h_b} \quad (2)$$

$$c = \frac{2s}{h_c} \quad \text{Somando,} \quad (3)$$

$$2p = 2s \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right). \quad \text{Mas}$$

$$\text{como } \frac{p}{S} = \frac{1}{r}, \quad \text{temos}$$

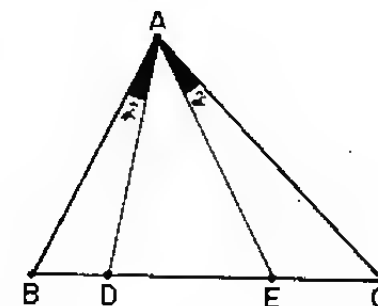
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$$

7.3.4 — Também poderemos calcular as raías das círculas exíscritas em função das alturas, bastando operar convenientemente as relações 7.3.3 — (1), (2) e (3), que forneceriam as seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} &= \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \\ \frac{1}{r_b} &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \\ \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \end{aligned}$$

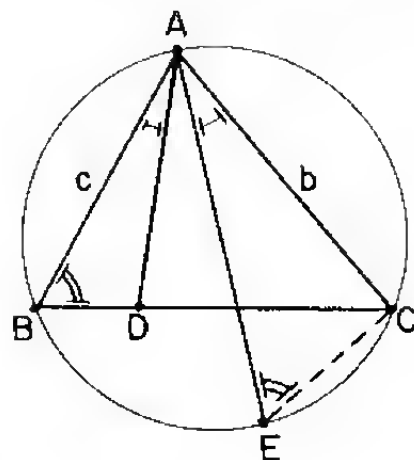
7.4 — CEVIANAS ISOGONAIS

Se duas cevianas partem do mesmo vértice e fazem mesmo ângulo com os lados que concorrem nesse vértice, são chamadas isogonais.



\overline{AD} e \overline{AE} são isogonais

Sejam \overline{AD} e \overline{AE} duas cevianas isogonais no triângulo ABC . (D sobre a base e E no círculo circunscrito.)



Verificamos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes, pois:

$$1) \quad \widehat{BAD} = \widehat{EAC} \text{ por construção}$$

$$2) \quad \widehat{ABD} = \widehat{AEC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}.$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{c}{AE} = \frac{AD}{b} \Rightarrow bc = AD \cdot AE.$$

7.5 — O CÍRCULO CIRCUNSCRITO

Considerando ainda o mesma figura da item anterior, vemos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes independentemente da ângula que AD e AE formam com \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Assim, nestes triângulos, se $\widehat{D} = 90^\circ$, então $\widehat{C} = 90^\circ$, sendo, portanto, \overline{AD} a altura relativa ao lado a e \overline{AE} o diâmetro do círculo circunscrito. Aplicando o propriedade anterior, temos

$$b \cdot c = h_a \cdot 2R.$$

Multiplicando ambos os termos por a , vem

$$abc = a \cdot h_a \cdot 2R, \text{ mas } a \cdot h_a = 2s.$$

Logo,

$$abc = 4RS.$$

7.6 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

275. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 10, 17 e 21.

Solução

$$\left. \begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow p = 24$$

$$S = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$$

$$S = pr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 84 = 24 \cdot r \Rightarrow r = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$$

Resposta: $\frac{7}{2}$.

276. Calcule os raios dos círculos exinscritos do triângulo do problema anterior.

Solução

Temos:

$$a = 10$$

$$b = 17$$

$$c = 21$$

$$p = 24$$

$$S = 84$$

$$S = r_a(p-a)$$

$$84 = r_a(24-10) \Rightarrow r_a = 6$$

$$S = r_b(p-b)$$

$$84 = r_b(24-17) \Rightarrow r_b = 12$$

$$S = r_c(p-c)$$

$$84 = r_c(24-21) \Rightarrow r_c = 28$$

Respostas: 6, 12 e 28.

277. Calcule o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 10, 17 e 21.

1.ª Solução

$$\left. \begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow p = 24, S = 84 \text{ (já calculado; n.º 275)}$$

$$obc = 4RS$$

$$10 \cdot 17 \cdot 21 = 4R \cdot 84 \Rightarrow R = \frac{85}{8}$$

2.ª Solução

Já tendo calculado nos problemas n.ºs 275 e 276 os raios dos círculos inscritos e exinscritos, poderemos calcular o raio do círculo circunscrito utilizando a relação dos cinco raios (Geometria I, n.º 8.7.3).

Temos:

$$r = \frac{7}{2}$$

$$r_a = 6$$

$$r_b = 12$$

$$r_c = 28.$$

Sobemos que

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \Rightarrow$$

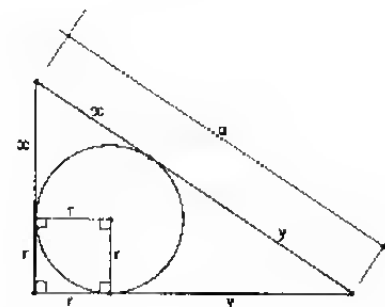
$$\Rightarrow 4R = 6 + 12 + 28 - \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{85}{8}$$

Resposta: $\frac{85}{8}$.

278. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de perímetro $2p$ e hipotenusa a .

Solução



Considerando o triângulo da figura, temos

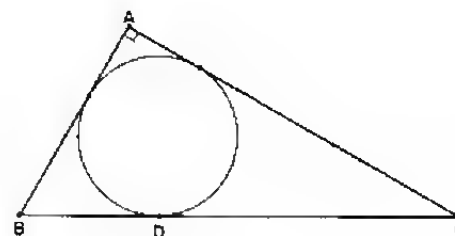
$$2x + 2y + 2r = 2p$$

$$\underbrace{x + y + r}_a = p \Rightarrow r = p - a$$

Resposta: $r = p - a$.

279. Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja D o ponto de contato do círculo inscrito com a hipotenusa. Prove que a área desse triângulo é $BD \cdot DC$.

Solução



$$S = pr, \text{ mas } r = p - a.$$

$$\text{Logo, } S = p \cdot (p - a).$$

Como

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$,
concluimos que no triângulo retângulo $S = (p-b)(p-c)$.
Mas $p-b=BD$ e $p-c=DC$.
Então,

$$S = BD \cdot DC$$

280. (IME -- 65) Calcule os lados de um triângulo conhecendo as alturas

$$h_a = \frac{1}{9}, \quad h_b = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad h_c = \frac{1}{4}.$$

1.ª Solução

De acordo com as relações 7.3.3 e 7.3.4, temos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{r} = 9 + 7 + 4 \Rightarrow r = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = 7 + 4 - 9 \Rightarrow r_a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = 9 + 4 - 7 \Rightarrow r_b = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = 9 + 7 - 4 \Rightarrow r_c = \frac{1}{12}$$

Mas $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$

Logo, $S = \sqrt{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{5}}{120}$

Como $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, teremos

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = a \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = b \cdot \frac{1}{7} \Rightarrow b = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = c \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

2.ª Solução

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S \quad \text{ou}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{4} = 2S. \quad \text{Então,}$$

$$a = 18S$$

$$b = 14S$$

$$c = 8S$$

$$2p = 40S \Rightarrow p = 20S.$$

Pela fórmula de Heron, temos

$$S^2 = 20S(2S)(6S)(12S) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{5}}{120}$$

$$a = \frac{18\sqrt{5}}{120} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$b = \frac{14\sqrt{5}}{120} = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$c = \frac{8\sqrt{5}}{120} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Resposta: $\frac{3\sqrt{5}}{20}, \frac{7\sqrt{5}}{60} \text{ e } \frac{\sqrt{5}}{15}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

281. O raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 5, 7 e 8 é:

~~A)~~ $\sqrt{3}$
B) $\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$

E) NRA.

282. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O maior círculo exinscrito tem raio igual a:

- A) $10\sqrt{3}$ ~~B) $5\sqrt{3}$~~
 B) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$
 E) NRA.

283. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O menor círculo exinscrito tem raio igual a:

- A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$
 B) $5\sqrt{3}$
 C) $\sqrt{3}$
 D) duas vezes o raio do círculo nele inscrito
 E) NRA.

284. Em um triângulo, $a = 4$ e $b + c = 6$. A razão $\frac{r}{r_o}$ é:

- A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
~~B) $\frac{1}{3}$~~ D) $\frac{1}{5}$
 E) $\frac{2}{5}$

285. Em um triângulo, $a = 7$, $b = 10$ e $c = 11$. Então, $\frac{r_o}{r_b}$ vale:

- A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$
 B) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{7}$
~~E) $\frac{4}{7}$~~

286. Em um triângulo, o produto dos raios dos círculos exinscritos é igual a:

- ~~A) p^2r~~
 B) $2p^2r$ $p = \text{semiperímetro}$
 C) pr^2 $r = \text{raio do círculo inscrito.}$
 D) $2pr^2$
 E) NRA.

287. (CICE — 70) A soma dos inversos das alturas de qualquer triângulo é igual:

- A) à soma dos inversos dos lados
~~B) ao inverso do raio do círculo inscrito~~
 C) ao inverso do raio do círculo circunscrito
 D) à razão do raio do círculo inscrito para o quadrado do raio do círculo circunscrito
 E) nenhum destes.

288. Em um triângulo de lados a , b e c a produto das raízes dos círculos inscrito e circunscrito é dado por:

$$Rr = k \frac{abc}{a+b+c}, \text{ onde } k \text{ vale:}$$

- A) 1 C) 4
 B) 2 D) $\frac{1}{2}$
 E) $\frac{1}{4}$

289. Calcule o raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles ABC onde $AB = AC = b$ e a altura $AH = h$.

- A) $\frac{b^2}{h}$ C) $\frac{2b^2}{h}$
~~B) $\frac{b^2}{2h}$~~ D) $\frac{b(b+h)}{h}$
 E) NRA.

290. Em um triângulo ABC a soma das alturas $h_a + h_b + h_c$ é igual a:

~~A)~~ $\frac{ab + bc + ca}{2R}$ C) $\frac{abc}{4R^2}$
 B) $\frac{ab + bc + ca}{4R}$ D) $\frac{abc}{2R^2}$
 E) NRA.

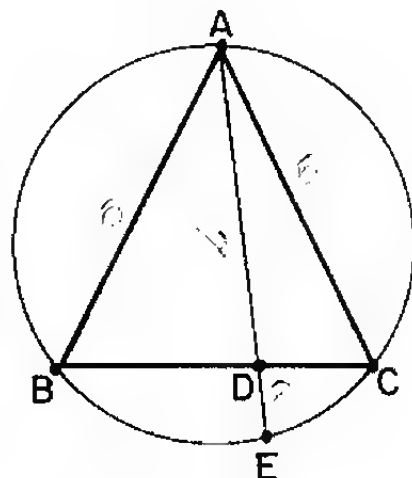
291. Em um triângulo,

$$\frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab}$$

é igual a:

A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
~~B)~~ $\frac{1}{R}$
 C) $\frac{3}{4R}$
 D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$
 E) NRA.

R = raio da círculo circunscrito.



292. Na figura ao lado,
 $AB = AC = 5$ e $AD = 4$.
 O prolongamento da ceviana
 \overline{AD} encontra a círculo circunscrita ao triângulo ABC em E.
 Então, DE mede:

A) 2
~~B)~~ 2,25

E) NRA.

C) 2,5

D) indeterminado

293. Calcule o área de um triângulo sabendo que os raios dos círculos exinscritos medem 3, 4 e 6.

A) $\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$
 B) $2\sqrt{6}$ D) $8\sqrt{6}$
 E) NRA.

294. O raio do círculo circunscrito ao triângulo cujas lados medem 5, 7 e 8 mede:

A) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ C) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$
 B) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$ D) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$
 E) NRA.

295. Considere dois círculos de centros A e B e raios a e b, respectivamente, estando B sobre a círculo de centro A. Se \overline{MN} é uma corda da círculo de centro A, tangente ao círculo de centro B, o produto $BM \cdot BN$ vale:

A) $\frac{ab}{2}$ C) $2ab$
 B) ab D) a^2
 E) b^2 .

296. Um triângulo ABC de lados $AB = 6$, $AC = 4$ e $BC = 5$ está inscrito num círculo. A bissetriz AD encontra a círculo circunscrita em E. Então, DE mede:

A) 1 C) $\sqrt{3}$
 B) $\sqrt{2}$ D) 2
 E) NRA.

297. Um triângulo ABC de lados $AB = 8$ e $AC = 12$ está inscrito em um círculo de raio igual a 8. A altura relativa ao lado a desse triângulo mede:

A) 3 C) 6
 B) 4 D) 8
 E) 9.

298. Seja S a área de um triângulo ABC e 2p seu perímetro. Então

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2}$$

é igual a:

A) $\frac{S}{p^2}$

C) $\frac{2p^2}{S}$

B) $\frac{p^2}{S}$

D) $\frac{S}{4p^2}$

E) NRA.

299. Em um triângulo ABC, $\cos \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\frac{p}{R}$

B) $\frac{2p}{R}$

C) $\frac{p}{2R}$

D) $\frac{p}{4R}$

E) NRA.

p = semiperímetro

R = raio do círculo circunscrito.

300. Em um triângulo ABC, $\sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\frac{r}{R}$

B) $\frac{2r}{R}$

C) $\frac{r}{2R}$

D) $\frac{r}{4R}$

E) NRA.

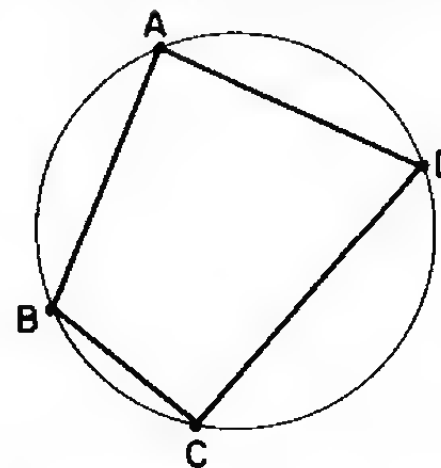
r = raio do círculo inscrito

R = raio do círculo circunscrito.

CAPÍTULO 8

OS QUADRILÁTEROS

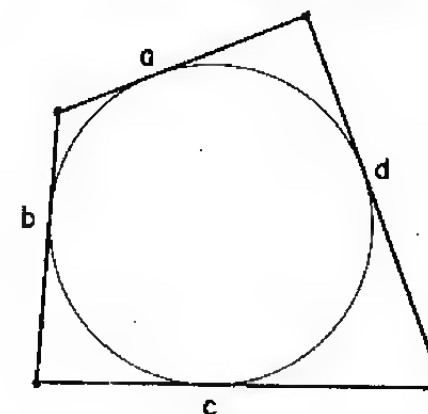
8.1 — QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL



Os quatro vértices pertencem a um mesmo círculo.

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

8.2 — QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL



Os quatro lados são tangentes a um mesmo círculo.

$$\Rightarrow a + b = c + d$$

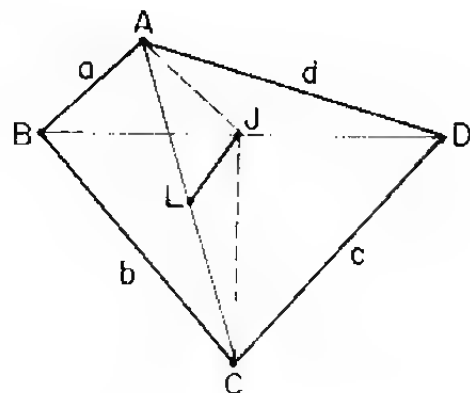
8.3 — RELAÇÃO DE EULER (quadrilátero qualquer)

Num quadrilátero qualquer, a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado da mediana de Euler do quadrilátero.

Demonstração

Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD, sendo

$$\begin{aligned} \text{lados} \quad & \begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases} \\ \text{diagonais} \quad & \begin{cases} AC = p \\ BD = q \end{cases} \end{aligned}$$



mediana de Euler* JL = m.

Como J é médio de BD, \overline{AJ} e \overline{CJ} são medianas nos triângulos ABD e CBD. Logo,

$$\begin{aligned} 4 AJ^2 &= 2(a^2 + d^2) - q^2 \\ 4 CJ^2 &= 2(b^2 + c^2) - q^2 \end{aligned}$$

Somando e dividindo por 2, temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - q^2 = 2(AJ^2 + CJ^2) \quad (1)$$

Mas, no triângulo AJC, JL = m é mediana. Logo,

$$\begin{aligned} 4m^2 &= 2(AJ^2 + CJ^2) - p^2 \quad \text{ou} \\ 2(AJ^2 + CJ^2) &= 4m^2 + p^2 \end{aligned}$$

Substituindo (2) em (1), teremos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4m^2$$

* A mediana de Euler é o segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

8.4 — APLICAÇÃO NOS TRAPÉZIOS

8.4.1 — Trapézio escaleno

Consideremos um trapézio ABCD onde temos

$$\text{bases} \quad \begin{cases} AB = b \\ CD = b' \end{cases}$$

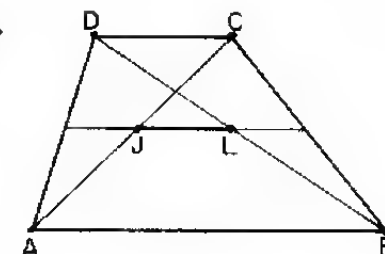
$$\text{lados não paralelos} \quad \begin{cases} AD = a \\ BC = c \end{cases}$$

$$\text{diagonais} \quad \begin{cases} AC = p \\ BD = q \end{cases}$$

$$\text{mediana de Euler } JL = m = \frac{b - b'}{2}$$

Substituindo na relação encontrada em 9.3, teremos

$$2bb' + a^2 + c^2 = p^2 + q^2$$



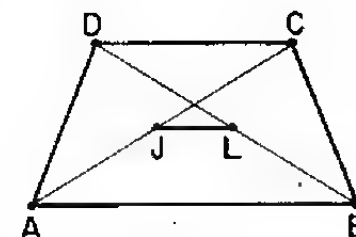
8.4.2 — Trapézio isósceles

No trapézio isósceles ABCD, devemos considerar

$$\begin{aligned} AD &= CB = a \\ AC &= BD = p \end{aligned}$$

Assim, a relação anterior toma o formato

$$a^2 + bb' = p^2$$



8.5 — APLICAÇÃO NO PARALELOGRAMO

Consideremos um paralelogramo ABCD onde

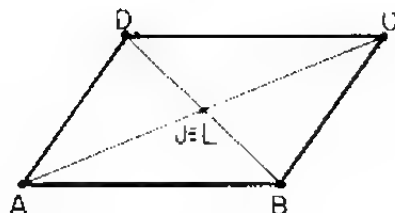
$$AB = CD = a$$

$$AD = BC = b$$

$$AC = p$$

$$AD = q$$

$$JL = O.$$



Substituindo na relação de Euler, temos

$$2(a^2 + b^2) = p^2 + q^2$$

8.6 — RELAÇÕES EM QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

8.6.1 — Relação de Ptolomeu

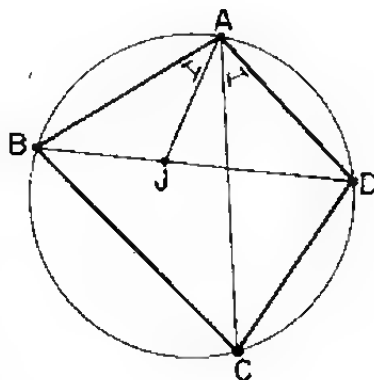
Num quadrilátero inscrito, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscrito ABCD da figura, sendo

$$\text{lados} \begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases}$$

$$\text{diagonais} \begin{cases} AC = p \\ BD = q \end{cases}$$



Consideremos ainda \overline{AJ} isogonal de \overline{AC} em relação a \overline{AB} e \overline{AD} . Assim, $\widehat{BAJ} = \widehat{CAD}$.

Da semelhança dos triângulos AJD e ABC, temos

$$\frac{JD}{b} = \frac{d}{p} \Rightarrow JD \cdot p = bd. \quad (1)$$

Da semelhança dos triângulos AJB e ADC, temos

$$\frac{BJ}{c} = \frac{a}{p} \Rightarrow BJ \cdot p = ac \quad (2)$$

Somando (1) e (2), temos

$$p(BJ + JD) = ac + bd \Rightarrow$$

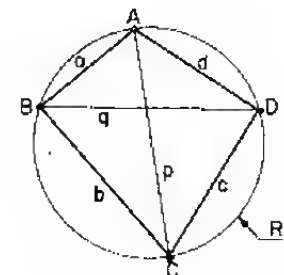
$$\Rightarrow pq = ac + bd$$

8.6.2 — Relação de Hiparco

A razão dos diagonais de um quadrilátero é a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com os respectivos diagonais.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscrito ABCD, da figura, e notemos que seu área é equivalente à soma de dois triângulos com um lado comum \overline{AC} ou com um lado comum \overline{BD} , a que permite escrever



$$S(BAC) + S(DAC) = S(ABD) + S(CBD)$$

Como os quatro triângulos possuem o mesmo círculo circunscrito e, de acordo com a relação B.5, temos

$$\frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{odq}{4R} + \frac{bcq}{4R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(ab + cd) = q(od + bc) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{od + bc}}$$

8.7 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CONVEXO

Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer de diagonais $AC = p$ e $BD = q$, sendo $\hat{\alpha}$ o ângulo formado por elas.

Sendo S o área do quadrilátero ABCD, podemos escrever

$$S = S(ACD) + S(ABC).$$

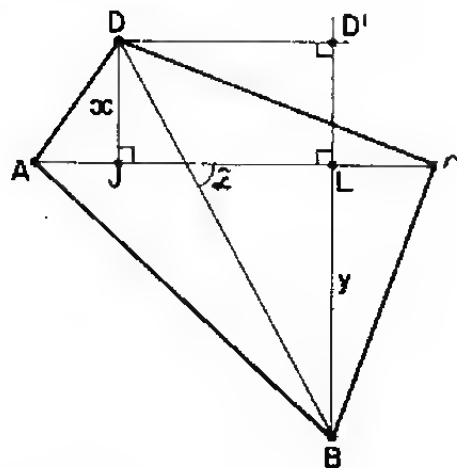
Sendo $DJ = x$ e $BL = y$ perpendiculares a \overline{AC} , teremos

$$S = \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} py \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} p(x + y).$$

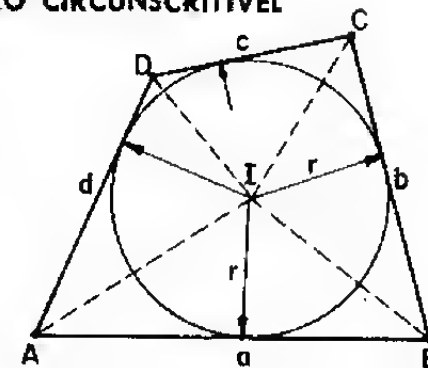
Porém, $x + y = BD' = q \sin \hat{\alpha}$. Logo,

$$\boxed{S = \frac{1}{2} pq \sin \hat{\alpha}}$$



8.8 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

Consideremos o quadrilátero circunscritível ABCD da figura. Sejam a, b, c, d os comprimentos de seus lados, r o raio do círculo inscrito e I o incentro. Se S é área do quadrilátero e p o semiperímetro, temos



$$S = S(AIB) + S(BIC) + S(CID) + S(DIA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(a + b + c + d)}{2} \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2p}{2} \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = pr}$$

8.9 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

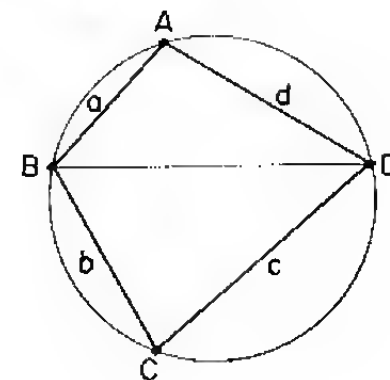
Consideremos o quadrilátero ABCD do figura.

A Lei dos co-senos nos triângulos ABD e CBD fornece

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A}$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{C}$$

Mos, como $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$,
 $\cos \hat{C} = -\cos \hat{A}$.



Igualando as expressões, temos

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + 2bc \cos \hat{A} &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(ad + bc) \cos \hat{A} &= a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \hat{A} &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}. \end{aligned}$$

Calculemos agora $1 + \cos \hat{A}$.

$$1 + \cos \hat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2ad + 2bc}{2(ad + bc)}$$

Mas $1 + \cos \hat{A} = 2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} &= \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} &= \frac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{2(ad + bc)}. \end{aligned}$$

Sendo $2p$ o perímetro do quadrilátero, temos

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} &= \frac{2(p - c) \cdot 2(p - b)}{2(ad + bc)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} &= \frac{(p - c)(p - b)}{(ad + bc)} \text{ e, analogamente,} \end{aligned}$$

como $1 - \cos \hat{A} = 2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$, encontraríamos

$$\cos^2 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{(p - a)(p - d)}{ad + bc}.$$

A área S do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos ADB e CDB .

$$S = \frac{ad \sin \hat{A}}{2} + \frac{bc \sin \hat{C}}{2}.$$

Mas $\sin \hat{A} = \sin \hat{C}$, pois $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Logo,

$$S = \frac{ad + bc}{2} \cdot \sin \hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{ad + bc}{2} \cdot 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}.$$

Quadrando,

$$S^2 = (ad + bc)^2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$$

$$S^2 = (ad + bc)^2 \frac{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ad + bc)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

8.10 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL E CIRCUNSCRITÍVEL

Em um quadrilátero inscritível,

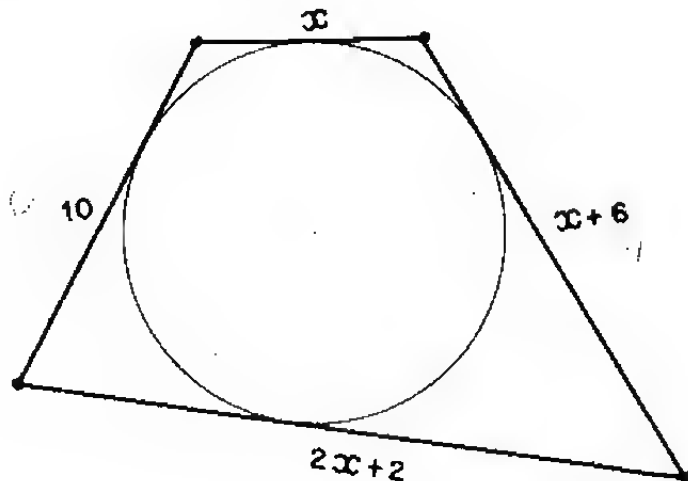
$$a + c = b + d = p.$$

Teremos, então,

$$S = \sqrt{(a + c - a)(b + d - b)(a + c - c)(b + d - d)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{abcd}.$$

8.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

301. Calcule x no quadrilátero da figura.

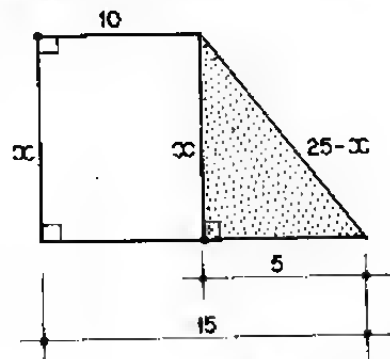
Solução

Porque o quadrilátero é circunscritível,

$$10 + x + 6 = x + 2x + 2 \Rightarrow x = 7$$

Resposta: 7

302. Calcule a altura de um trapézio retângulo circunscritível de bases 15 e 10.



Resposta: 12

Solução

$$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 12$$

Dividindo membro a membro,

$$pq \cdot \frac{q}{p} = (ac + bd) \frac{ad + bc}{ab + cd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

305. Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível ABCD cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} medem respectivamente 1, 2, 2 e 3.

A) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{5}$

B) 2

~~D) $\sqrt{7}$~~

E) NRA.

306. A mediana de Euler do quadrilátero do problema anterior tem comprimento igual a:

A) $\sqrt{\frac{69}{7}}$

C) $\sqrt{\frac{27}{7}}$

B) $\sqrt{\frac{52}{7}}$

~~D) $\sqrt{\frac{13}{7}}$~~

E) NRA.

307. O raio do círculo circunscrito ao quadrilátero do problema 305 mede:

A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

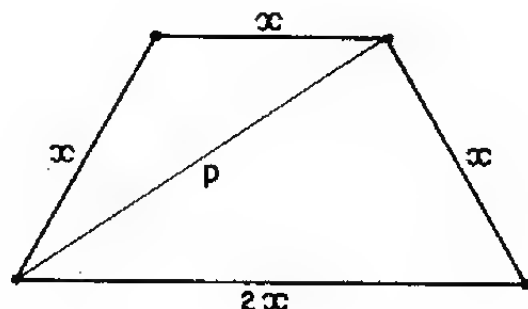
C) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

E) NRA.

303. Calcule o comprimento dos diagonais do trapézio isósceles da figura.



Solução

De 8.4.2, temos

$$x^2 + x \cdot 2x = p^2 \Rightarrow p = x\sqrt{3}$$

Resposta: $x\sqrt{3}$.

304. Calcule as diagonais de um quadrilátero inscrito em função dos lados.

Solução

Conhecemos as relações de Ptolomeu e Hiparco (8.6.1 e 8.6.2)

$$pq = ac + bd$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ac + bd}{ad + bc}$$

Multiplicando membro a membro,

$$pq \cdot \frac{p}{q} = (ac + bd) \frac{ac + bd}{ad + bc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

308. Calcule o comprimento do segmento que une os pontos médios das bases \overline{AB} e \overline{CD} de um trapézio, conhecendo seus lados: $AB = 14$, $BC = 7$, $CD = 4$ e $DA = 5$.

A) 2

B) $2\sqrt{2}$

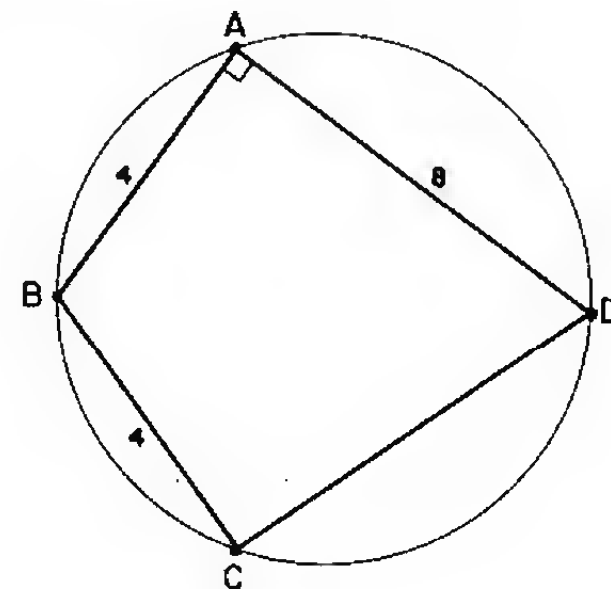
C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 309 A 312

No quadrilátero inscrito da figura, $AB = BC = 4$, $AD = 8$ e $\hat{A} = 90^\circ$.



309. A área desse quadrilátero mede:

A) 32

B) 28

C) 24

D) 16

E) NRA.

310. O raio do círculo inscrito nesse quadrilátero mede:

A) $\frac{12}{5}$

B) $\frac{16}{3}$

C) $\frac{8}{3}$

D) $\frac{9}{4}$

E) NRA.

311. O raio do círculo circunscrito a esse quadrilátero mede:

- A) $\sqrt{20}$ C) $\sqrt{58}$
B) $2\sqrt{20}$ D) $\sqrt{65}$

E) NRA.

312. A menor diagonal desse quadrilátero mede:

- A) $\sqrt{20}$ C) $\frac{4}{5}\sqrt{20}$
B) $\frac{5}{4}\sqrt{20}$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{20}$

E) NRA.

313. Calcule a área do quadrilátero ABCD inscrito cujos lados medem: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ e $DA = 7$.

- A) $\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{15}$
B) $\sqrt{30}$ D) $2\sqrt{30}$

E) NRA.

314. (CICE — 70) Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b , e uma das diagonais tem por medida c . Então, a medida da outra diagonal é:

- A) $\sqrt{3(a^2 + b^2) - 2c^2}$
B) $\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$
C) $\sqrt{4(a^2 + b^2) - 3c^2}$
D) $\sqrt{2ab - c}$

E) nada disso.

315. (IME — 66) Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda da arca soma das arcos das cordas anteriores.

- A) 8 C) $8\sqrt{2}$
B) $6\sqrt{2}$ D) $10\sqrt{2}$

E) NRA.

316. Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda da arca diferença dos arcos das cordas anteriores.

- A) 4 C) $3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$.

317. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de um quadrilátero que possui diagonais perpendiculares:

- A) pode ser qualquer quadrilátero
B) é um retângulo
C) é um losango
D) é um quadrado
E) NRA.

318. Num quadrilátero inscrito ABCD, $AD = DC$. Se as diagonais desse quadrilátero cortam-se em I e se $AI = 6$, $CI = 4$ e $BI = 8$, o maior lado desse quadrilátero mede:

- A) $\sqrt{33}$ C) $3\sqrt{33}$
B) $2\sqrt{33}$ D) $4\sqrt{7}$

E) NRA.

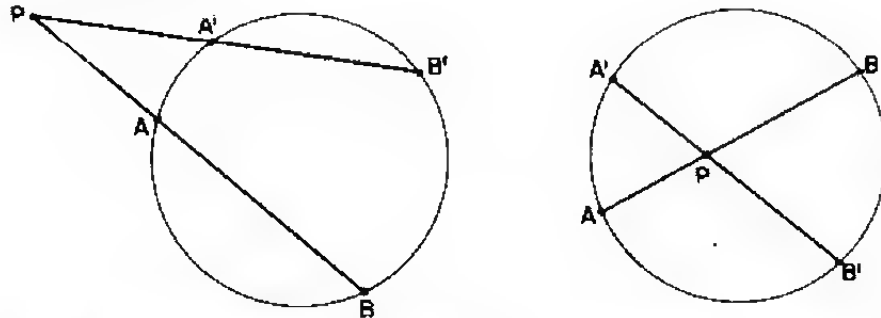
CAPÍTULO 9

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

9.1 — TEOREMA

Se duas cordas \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ de um círculo concorrem em um ponto P interior ou exterior a esse círculo, o produto $PA \cdot PB$ é igual a $PA' \cdot PB'$.

Demonstração



Realmente, porque $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são antiparalelos em relação a \overline{PA} e $\overline{PA'}$, efetivamente podemos escrever

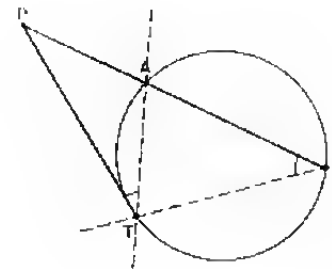
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

(V. 3.10.2 — II)

9.2 — TEOREMA

Se P é um ponto exterior a um círculo, \overline{PAB} uma secante qualquer e \overline{PT} o segmento da tangente traçada deste ponto ao círculo, então $PT^2 = PA \cdot PB$.

Demonstração



Da semelhança dos triângulos $\triangle PAT$ e $\triangle PTB$, ou simplesmente notando que \overline{TA} e \overline{TB} ainda são antiparalelos em relação a \overline{PT} e \overline{PB} , de acordo com a relação encontrada em 3.10.4 podemos escrever

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

9.3 — DEFINIÇÃO

Se por um ponto P traçarmos uma reta que corte um círculo (O, R) nos pontos A e B , chama-se **POTÊNCIA** do ponto P em relação ao círculo ao produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ * e escreve-se

$$\text{Pot}_{(O)} P = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

1.º caso — P é exterior ao círculo.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \implies$$

$$\implies \text{Pot}_{(O)} P = PA \cdot PB$$

2.º caso — P é interior ao círculo.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \cdot \cos 180^\circ \implies$$

$$\implies \text{Pot}_{(O)} P = -PA \cdot PB$$

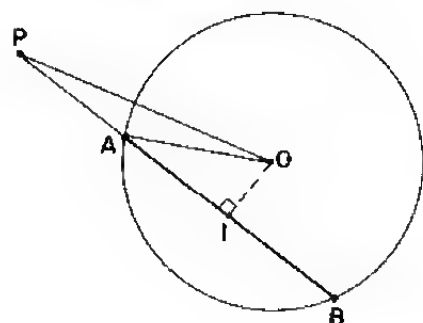
* O produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ é definido como sendo igual a $PA \cdot PB \cdot \cos \alpha$, sendo α o ângulo que \overrightarrow{PA} forma com \overrightarrow{PB} .

Pelos propriedades anteriores, verificamos que o produto $PA \cdot PB$ é sempre constante para qualquer reta que contenha P , sendo função apenas da sua posição em relação ao círculo.

9.4 — TEOREMA

A potência de um ponto P em relação a um círculo pode ser calculado por $d^2 - R^2$, sendo d a distância de P ao centro do círculo e R o raio desse círculo.

Demonstração

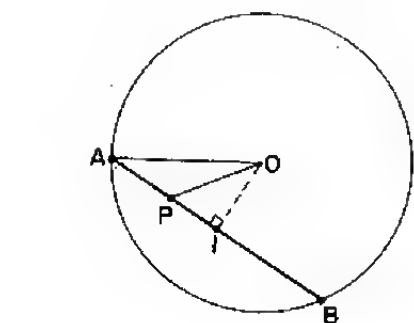


1.º caso — P é exterior.

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (PI - IA)(PI + IA) = \\ &= PI^2 - IA^2 = \\ &= (PO^2 - OI^2) - \\ &= (OA^2 - OI^2) = \\ &= PO^2 - OA^2 = \\ &= d^2 - R^2. \end{aligned}$$

2.º caso — P é interior.

$$\begin{aligned} -PA \cdot PB &= -(IA - PI)(PI + IA)^* = \\ &= (PI - IA)(PI + IA) = \\ &= PI^2 - IA^2 = \\ &= (PO^2 - OI^2) - \\ &= (OA^2 - OI^2) = \\ &= PO^2 - OA^2 = \\ &= d^2 - R^2. \end{aligned}$$



Concluimos, portanto,

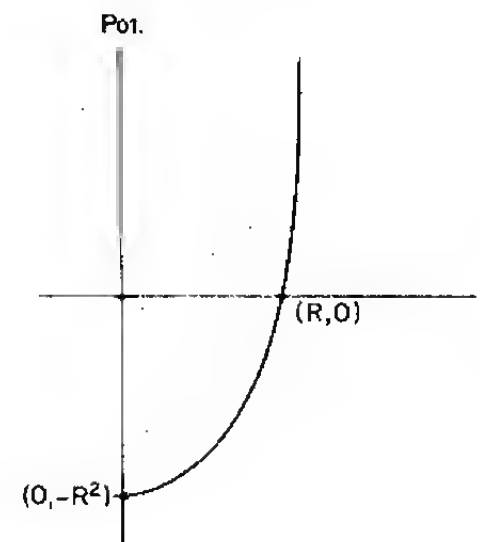
$$\text{Pot}_{(O)} P = d^2 - R^2$$

* Segmentos não orientados.

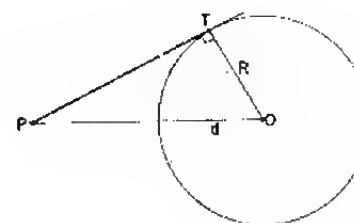
Observemos que:

- 1) Se P é exterior ao círculo, $d > R \Rightarrow \text{Pot } P > 0$.
- 2) Se P pertence ao círculo, $d = R \Rightarrow \text{Pot } P = 0$.
- 3) Se P é interior ao círculo, $d < R \Rightarrow \text{Pot } P < 0$.
- 4) O centro é o ponto de potência mínima, ou seja, $\text{Pot}_{(O)} O = -R^2$.
- 5) Função potência: $(R_+ \rightarrow [-R^2, +\infty))$

$$d \mapsto d^2 - R^2$$

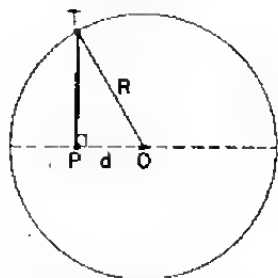


- 6) Se P é exterior ao círculo,



$$\text{Pot}_{(O)} P = PT^2$$

7) Se P é interior ao círculo,

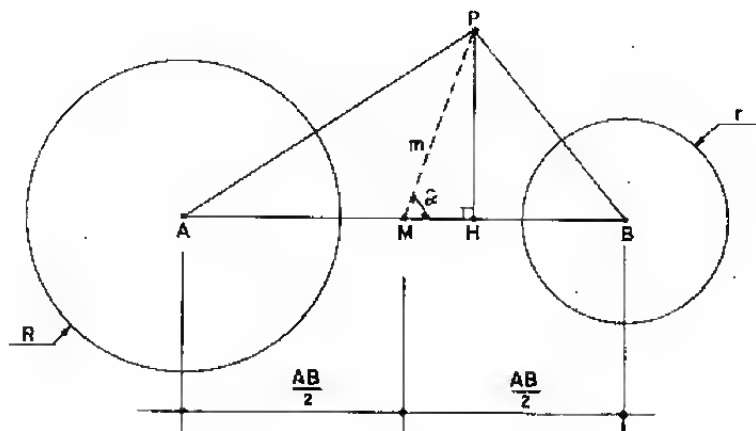


$$\text{Pot}_{\{O\}} P = -PT^2.$$

9.5 — EIXO RADICAL

Chamamos de Eixo Radical de dois círculos ao lugar geométrico dos pontos de igual potência em relação a esses círculos.

Para a pesquisa do lugar, consideremos dois círculos de centros A e B e raios R e r, respectivamente. Consideremos ainda M, médio de AB, um ponto P deste lugar e sua projeção H sobre AB.



$$\text{Pot}_{\{A\}} P = \text{Pot}_{\{B\}} P \implies$$

$$\implies PA^2 - R^2 = PB^2 - r^2 \implies$$

$$\implies PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2$$

(1)

$$\Delta PMA \rightarrow PA^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 + 2 \frac{AB}{2} m \cos \hat{\alpha}$$

$$\Delta PMB \rightarrow PB^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 - 2 \frac{AB}{2} m \cos \hat{\alpha}.$$

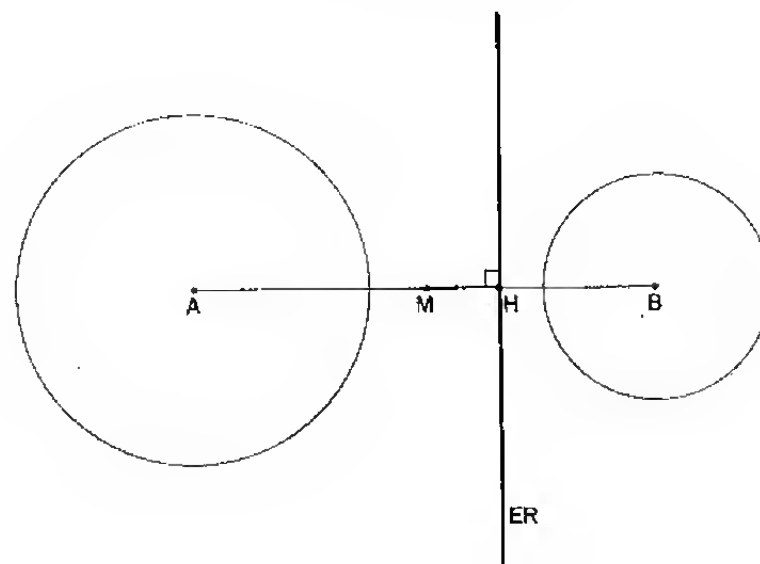
Subtraindo,

$$PA^2 - PB^2 = 2 AB m \cos \hat{\alpha} \text{ e, por } (1),$$

$$R^2 - r^2 = 2 \cdot AB \cdot MH. \quad (2)$$

Vemos que, como $R^2 - r^2$ é constante, $2 \cdot AB \cdot MH$ também o será. Deste último, concluímos que MH é constante, não dependendo das posições de P. Logo, o L. G. procurado é a reta perpendicular a AB, que contém M, cuja posição determinaremos a partir de (2).

$$MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB}$$

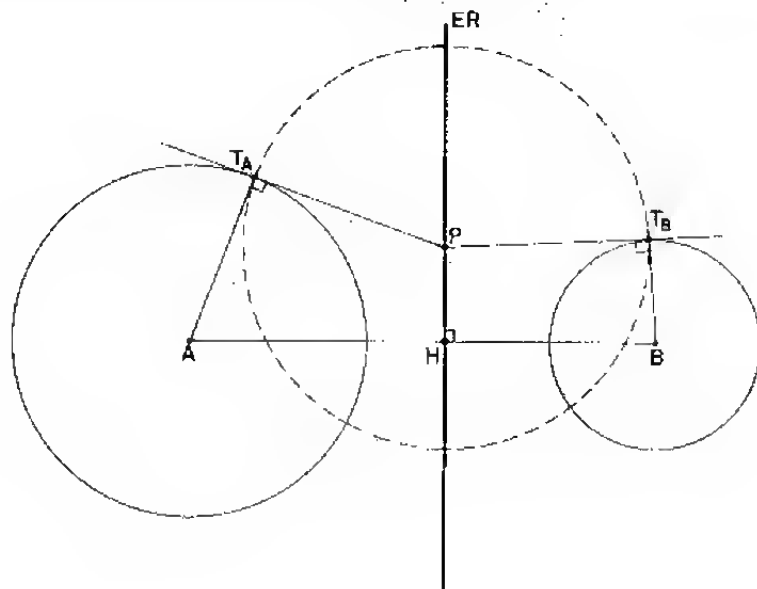


Observemos que:

- 1) O valor MH encontrado deve ser marcado a partir de M em direção ao centro do menor círculo, pois

$$R > r \Rightarrow PA > PB \Rightarrow HA > HB.$$

- 2) De qualquer ponto do eixo radical podemos traçar tangentes de mesmo comprimento aos dois círculos.



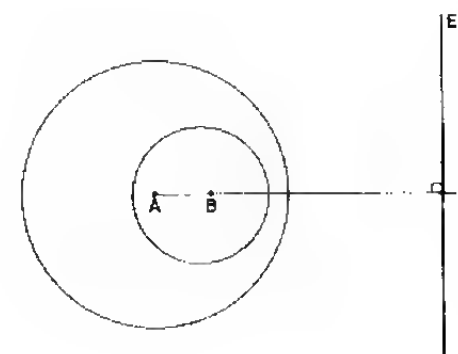
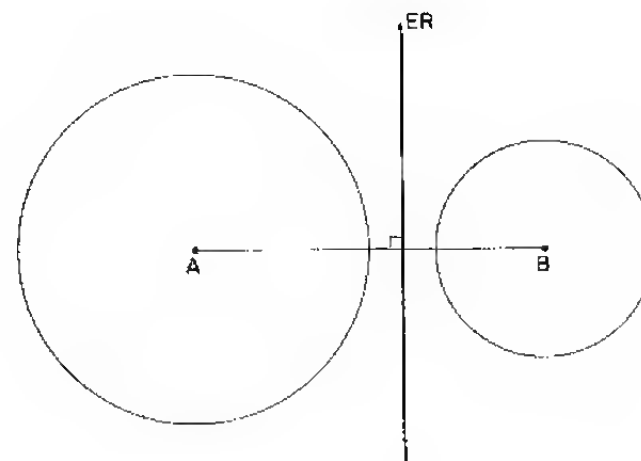
$$\left. \begin{array}{l} \text{Pot}_{(A)} P = PT_A^2 \\ \text{Pot}_{(B)} P = PT_B^2 \\ P \in ER \end{array} \right\} \Rightarrow PT_A = PT_B$$

- 3) O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos dados.

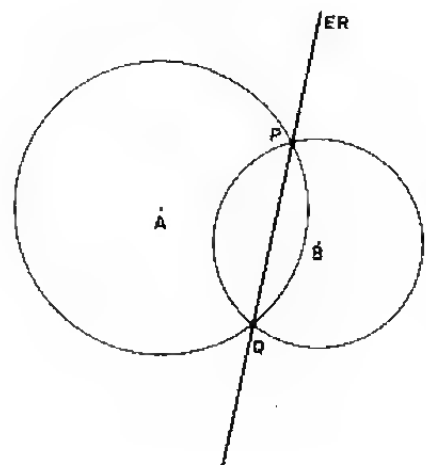
Realmente, pois $PT_A = PT_B$ e

$$\widehat{AT_A P} = \widehat{BT_B P} = 90^\circ.$$

- 4) Se dois círculos são interiores ou exteriores, o eixo radical não tem ponto comum com nenhum deles.



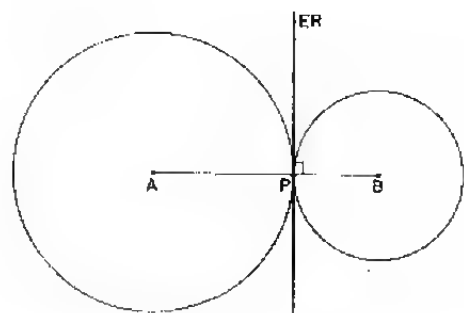
- 5) Se dois círculos são secantes, o eixo radical é a reta suporte da corda comum.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Pot}_{(A)} P = \text{Pot}_{(B)} P = 0 \\ \text{Pot}_{(A)} Q = \text{Pot}_{(B)} Q = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

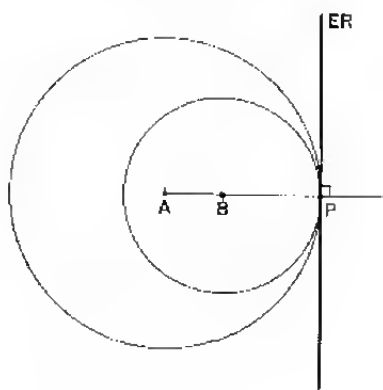
$$\Rightarrow P, Q \in ER.$$

- 6) Se dois círculos são tangentes, o eixo radical é a reta tangente comum.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Pot}_{(A)} P = \text{Pot}_{(B)} P = 0 \\ ER \perp \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ER \text{ é a tangente comum aos círculos.}$$



- 7) Dois círculos concêntricos não possuem eixo radical.

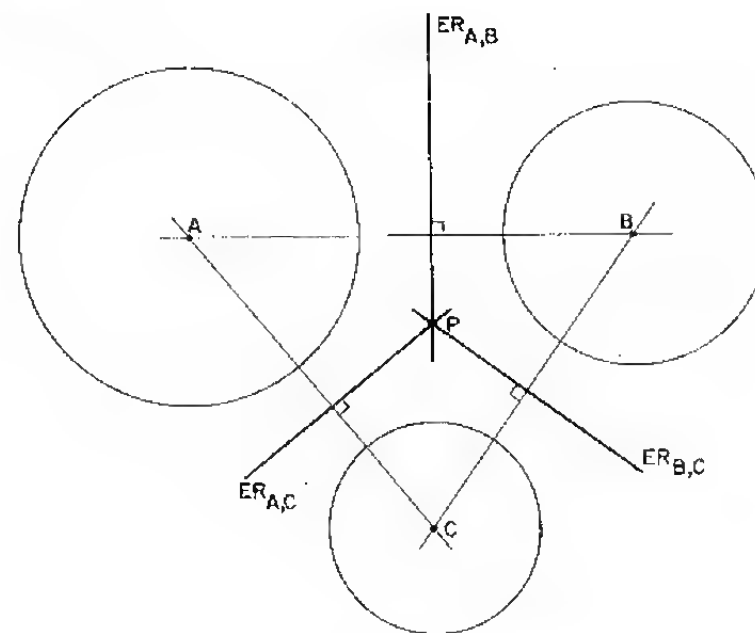
De fato, se lembrarmos que $MH = \frac{R^2 - r^2}{2AB}$

temos

$$B \rightarrow A \Rightarrow \begin{cases} M \rightarrow A \\ MH \rightarrow \infty \end{cases}$$

9.6 — CENTRO RADICAL

Chamamos de *Centro Radical* de três círculos o ponto que possui igual potência em relação aos mesmos. Consideremos três círculos de centros A, B e C, não colineares, e os eixos radicais $ER_{A,B}$ e $ER_{B,C}$ que concorrem em P.



$$P \in ER_{A,B} \Rightarrow \text{Pot}_{(A)} P = \text{Pot}_{(B)} P$$

$$P \in ER_{B,C} \Rightarrow \text{Pot}_{(B)} P = \text{Pot}_{(C)} P$$

Portanto,

$$\text{Pot}_{(A)} P = \text{Pot}_{(C)} P, \text{ ou seja, } P \in \text{ER}_{A, C}.$$

O ponto P é, então, o Centro Radical.

Observemos ainda que:

- 1) O centro radical é o único ponto de onde se pode traçar tangentes de mesmo comprimento aos três círculos.
- 2) O centro radical é o centro do único círculo ortogonal aos três círculos dados.

9.7 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

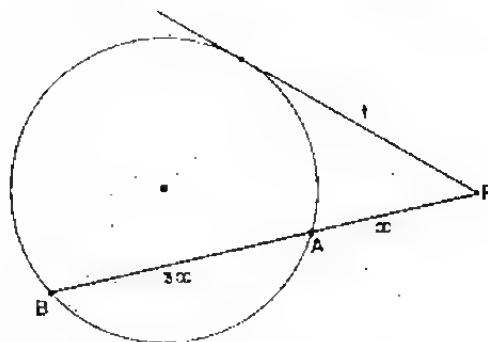
319. Calcule na figura o comprimento da tangente traçada de P ao círculo.

Solução

$$t^2 = PA \cdot PB, \text{ onde}$$

$$PA = x \text{ e}$$

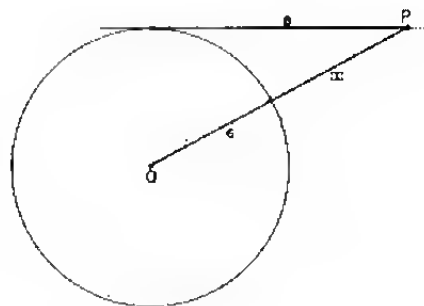
$$PB = 4x$$



Logo, $t^2 = x \cdot 4x = 4x^2 \Rightarrow t = 2x$

Resposta: $2x$

320. Calcule x na figura.



Solução

$$\text{Pot}_{(O)} P = d^2 - R^2 = (6 + x)^2 - 6^2 = t^2 = 8^2,$$

$$36 + 12x + x^2 - 36 = 64$$

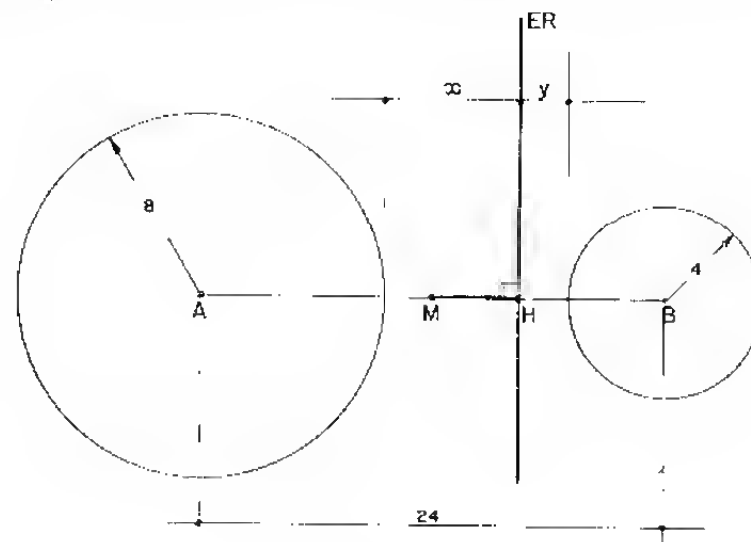
$$x^2 + 12x - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -16 \text{ (não serve)}$$

$$x = 4$$

Resposta: $x = 4$

321. Determine as distâncias do eixo radical a cada um dos círculos da figura.



Solução

Chamemos de x e y as distâncias procuradas e seja M médio de AB. Temos

$$MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MH = \frac{8^2 - 4^2}{2 \cdot 24} = 1.$$

Então,

$$x = AM + MH - R$$

$$x = 12 + 1 - 8 = 5$$

$$y = AM - MH - r$$

$$y = 12 - 1 - 4 = 7$$

Respostas: $x = 5$

$y = 7$.

322. Considerando o figura do problema anterior, determine, dos pontos que possuem igual potência em relação aos dois círculos, aquele cuja potência é mínima e calcule esse valor.

Solução

Se as potências são iguais, o ponto pertence ao eixo radical dos dois círculos e se o valor da potência é mínimo, o ponto procurado é o ponto H da figura do problema 321, pois a distância a qualquer dos centros é mínima. Calcularemos a potência de H em relação a cada um dos círculos.

Do problema anterior, temos

$$AH = 13 \text{ e } BH = 11.$$

Então,

$$\text{Pot}_{(A)} H = AH^2 - R^2 = 13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$$

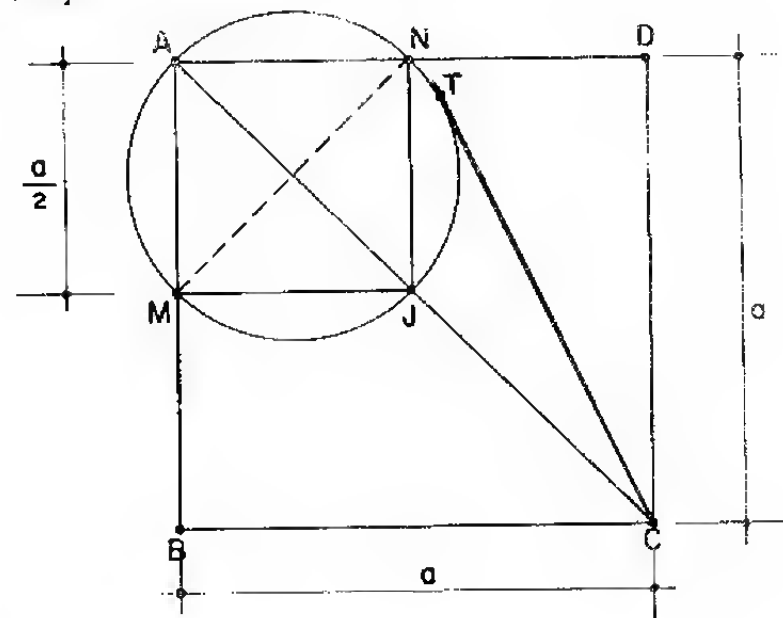
$$\text{Pot}_{(B)} H = BH^2 - r^2 = 11^2 - 4^2 = 121 - 16 = 105.$$

$$\text{Resposta: } \text{Pot}_{(A)} H = \text{Pot}_{(B)} H = 105.$$

323. Considere o círculo que passa pelo ponto A de um quadrado ABCD e pelos pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AD} . Prove que a

tangente a esse círculo traçada por C tem comprimento igual ao lado do quadrado.

Solução



Consideremos o figura. Verificamos imediatamente que \overline{MN} e \overline{AJ} são diâmetros e, conseqüentemente, $AMJN$ é um quadrado

de lado $\frac{a}{2}$. Então,

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$MJ = \frac{a}{2}$$

$$AJ = CJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$CT^2 = CJ \cdot CA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2 \Rightarrow CT = a.$$

324. Calcule x no figura

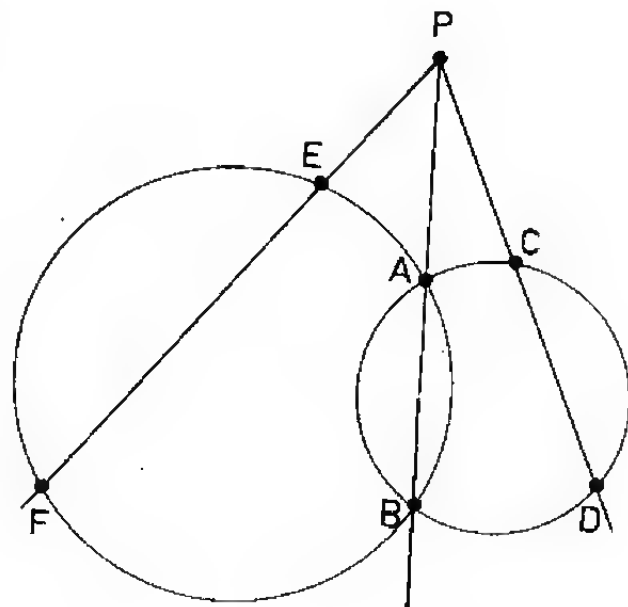
sendo

$$PC = 4$$

$$CD = 5$$

$$PE = 2$$

$$EF = x.$$



Solução

Como P pertence ao eixo radical dos círculos, P possui potências iguais em relação a ambos. Então,

$$PC \cdot PD = PE \cdot PF \implies$$

$$\implies 4 \cdot 9 = 2(2 + x) \implies x = 16.$$

Resposta: 16

325. Pelo ponto M médio do arco AB de um círculo traço-se um cordo \overline{MD} que é concorrente com \overline{AB} em C. Demonstre que MA é tangente ao círculo que passa por A, C e D.

Solução

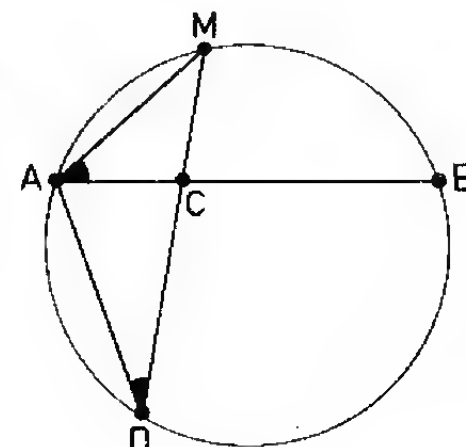
Considerando os triângulos MAC e MDA da figura, temos

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{\widehat{AM}}{2} = \widehat{D}.$$

Então, $\triangle MAC \sim \triangle MDA$

$$\implies \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \implies$$

$\implies MA^2 = MC \cdot MD$, o que mostra que MA é tangente em A ao círculo que passa por A, C e D.



PROBLEMAS PROPOSTOS

326. Calcule x na figura.

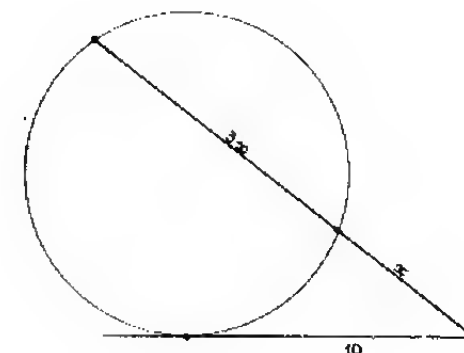
A) 8

B) 6

C) 5

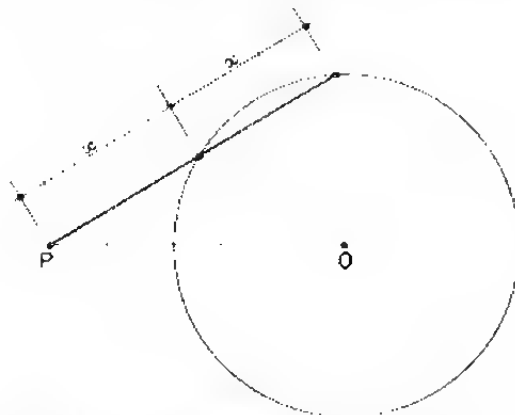
D) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

E) NRA,



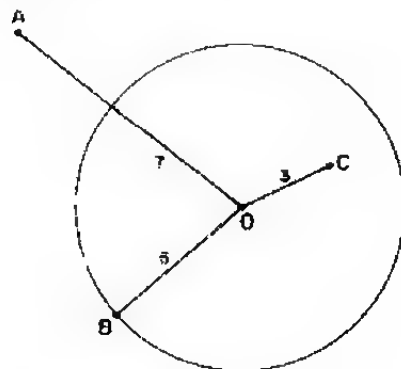
327. Na figura, calcule x sendo o raio do círculo igual a 4 e $PO = 6$.

- A) $\sqrt{10}$
- B) $\sqrt{13}$
- C) $\sqrt{15}$
- D) $\sqrt{17}$
- E) NRA.



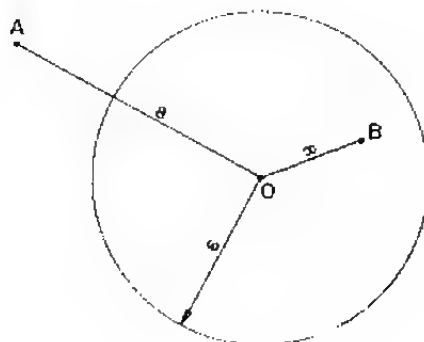
328. Considere o círculo da figura. Então, $\text{Pot}_O A + \text{Pot}_O B + \text{Pot}_O C$ vale:

- A) 8
- B) 9
- C) 33
- D) 83
- E) NRA.



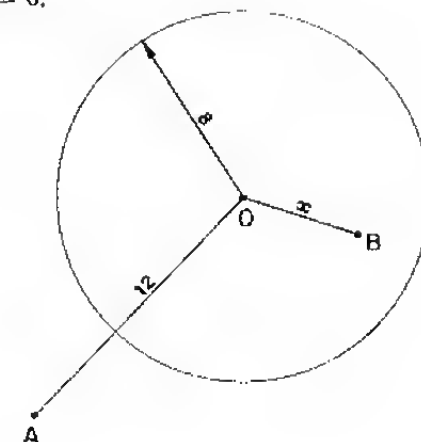
329. Calcule x para que $\text{Pot}_O A + \text{Pot}_O B = 0$.

- A) 2
- B) 3
- C) $2\sqrt{2}$
- D) impossível
- E) NRA.



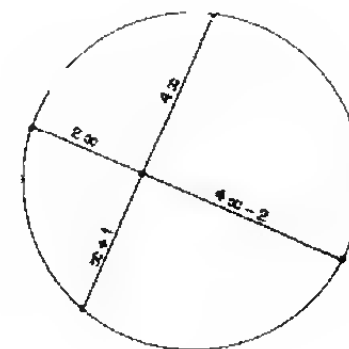
330. Calcule x para que $\text{Pot}_O A + \text{Pot}_O B = 0$.

- A) 0
- B) 1
- C) $\sqrt{2}$
- D) impossível
- E) NRA.



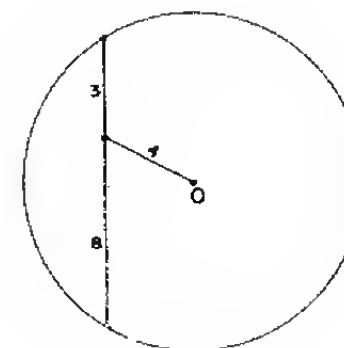
331. Calcule x na figura.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) 1
- C) 2
- D) $\frac{5}{2}$
- E) 3



332. Calcule o raio do círculo da figura.

- A) $\sqrt{10}$
- B) $2\sqrt{10}$
- C) $3\sqrt{10}$
- D) impossível
- E) NRA.



333. Em um círculo, as cordas \overline{AB} e \overline{CD} são perpendiculares e cortam-se em I. Traça-se por I uma perpendicular a \overline{AD} que corta o círculo em E e G e \overline{AD} em F. (F entre I e G). Se $AF = 4$, $FD = 9$ e $FG = 5$, então EI mede:

- A) 1
B) $\frac{6}{5}$
C) $\frac{8}{5}$
D) $\frac{7}{6}$

E) NRA.

334. Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio R e tal que $OP = R\sqrt{3}$. Traça-se por P o secante PAB ao círculo. Se $PA = R$, AB é igual a:

- A) R
B) $\frac{R}{2}$
C) $R\sqrt{2}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

E) NRA.

335. Se a distância de um ponto ao centro de um círculo aumenta de 10%, a sua potência em relação a esse círculo aumenta de:

- A) 10%
B) 20%
C) não é possível calcular
D) 100%

E) 21%

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 336 E 337

Dois círculos de centros A e B e raios 12 e 8 são tais que $AB = 20$.

336. A distância de A ao eixo radical desses círculos é:

- A) 19
B) 20
C) 21
D) 29

E) NRA.

337. O valor da menor potência que um ponto pode possuir em relação aos dois círculos é:

- A) 156
B) 189
C) 204
D) 297

E) NRA.

338. A distância do eixo radical dos dois círculos ao maior deles é:

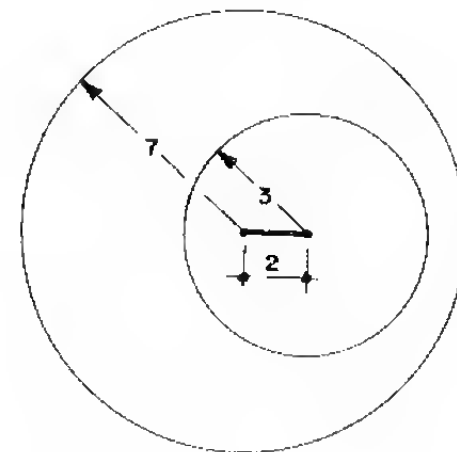
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 10.



339. Num triângulo ABC, o ceviano \overline{AD} encontra o círculo circunscrito em E. Se $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ e $BD = 4$, então DE mede:

A) $\sqrt{11}$

B) $\sqrt{7}$

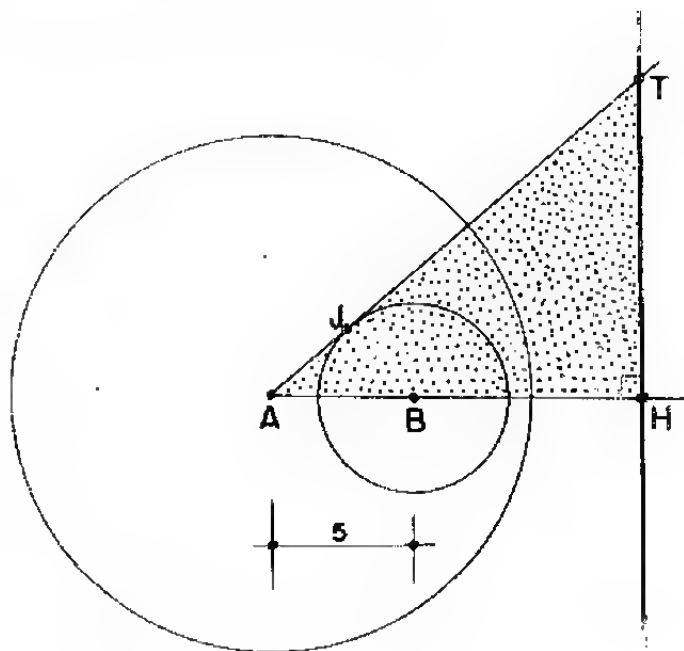
C) $\frac{8}{11}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $\frac{8}{\sqrt{11}}$

340. Considere os círculos da figura de raios 10 e 4 e seu eixo radical. Se \overline{OT} é tangente em J ao círculo menor, calcule a área do triângulo ATH .

- A) $\frac{13.881}{150}$
 B) $\frac{12.773}{133}$
 C) $\frac{11.166}{161}$
 D) $\frac{11.227}{100}$
 E) $\frac{11.655}{182}$



ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 341 E 342

Seja P um ponto de um círculo de diâmetro \overline{AB} e seja \overline{PC} perpendicular a \overline{AB} . O círculo de diâmetro \overline{PC} encontra o primeiro em E e a reta PE corta \overline{AB} em M . Sabe-se que $AB = 16$ e $MA = 2$.

341. MC mede:

- A) $3\sqrt{2}$
 B) $3\sqrt{3}$
 C) $4\sqrt{2}$
 D) $6\sqrt{2}$

E) 6

342. PC mede:

- A) $3\sqrt{2}$
 B) $3\sqrt{3}$
 C) $4\sqrt{2}$
 D) $4\sqrt{3}$

E) 4

343. Dois círculos de raios 3 e 4 são ortogonais. Calcule a distância de um ponto P à reta que contém os centros sabendo que ele possui potência igual a 16 em relação aos dois círculos.

- A) $\sqrt{34}$
 B) $\frac{5}{4}\sqrt{34}$
 C) $\frac{4}{5}\sqrt{34}$
 D) $\frac{3}{5}\sqrt{34}$

E) NRA.

344. As cordas \overline{AB} e \overline{CD} de um círculo são perpendiculares e cortam-se em I . Se $AI = 4$, $IB = 6$ e $CI = 3$, calcule o diâmetro deste círculo.

- A) 5
 B) $5\sqrt{2}$
 C) $5\sqrt{3}$
 D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

345. Sendo \overline{AD} a bissetriz interna ao ângulo A da triângulo ABC , prove que $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

346. É dado um triângulo isósceles ABC , inscrito em um círculo, e um ponto M do prolongamento da base \overline{BC} do triângulo. Prove que $MA^2 = AB^2 - MB \cdot MC$.

347. Os segmentos das tangentes traçadas de P a dois círculos distintos não concêntricos são congruentes. Determine o lugar geométrico de P .

348. O ângulo entre as tangentes traçadas de P ao círculo A é o mesmo ângulo formado pelas tangentes traçadas deste ponto ao círculo B . Determine o lugar geométrico de P .

349. Prove que, se uma secante a dois círculos ortogonais passa pelo centro de um deles, os quatro pontos de interseção formam uma divisão harmônica.

350. (IME — 67). Dois círculos exteriores possuem diâmetros 2 e 10 e seu eixo radical dista 5 de um deles. Pode-se:

- a) O comprimento da tangente comum externa.
 b) Sendo P o ponto em que o ER corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos dois círculos, determinar a área do triângulo POO' .

CAPÍTULO 10

POLÍGONOS REGULARES

10.1 — DEFINIÇÃO

Polígono regular é todo polígono que possui lados congruentes e ângulos também congruentes. Verificamos, ainda, que todo polígono regular é inscritível e circunscritível.

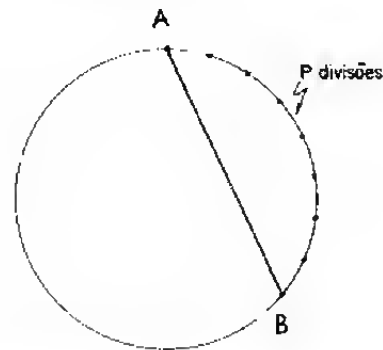
10.2 — CONSTRUÇÃO

Consideremos um círculo dividido em n partes iguais.

A partir de um determinado ponto de divisão trocaremos cordas consecutivas, congruentes, correspondentes a p divisões. Então, cada corda determina um arco

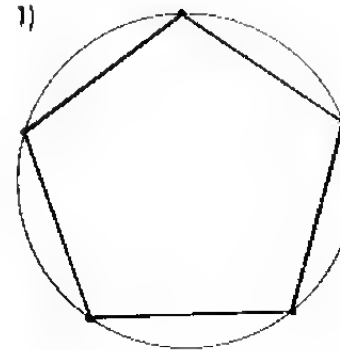
$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{n} \cdot p$$

Esta operação será repetida, até que voltemos ao ponto de partida. O polígono obtido terá, então, gênero g , e para seu fechamento necessitamos dar k voltas no círculo. Ao número k chamamos de espécie do polígono. Se $k = 1$, o polígono é convexo e se $k > 1$, o polígono é estrelado.



Exemplos:

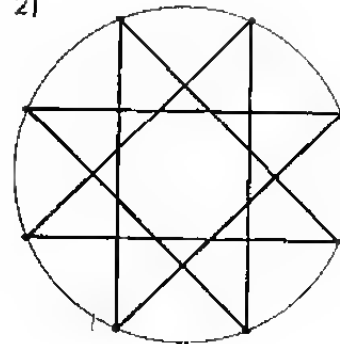
1)



$$\left. \begin{array}{l} \text{divisões do círculo: } n = 5 \\ \text{construção: } p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{gênero do polígono: } g = 5 \\ \text{espécie: } k = 1 \end{array} \right.$$

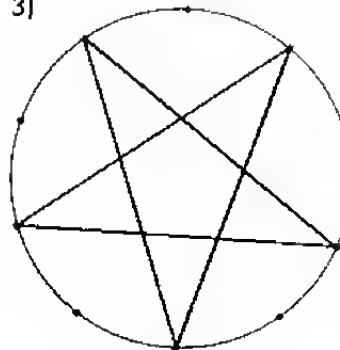
2)



$$\left. \begin{array}{l} \text{divisões do círculo: } n = 8 \\ \text{construção: } p = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{gênero do polígono: } g = 8 \\ \text{espécie: } k = 3 \end{array} \right.$$

3)



$$\left. \begin{array}{l} \text{divisões do círculo: } n = 10 \\ \text{construção: } p = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{gênero do polígono: } g = 5 \\ \text{espécie: } k = 2 \end{array} \right.$$

Verificamos que:

- a) O arco correspondente a um lado mede $\frac{360^\circ}{n} \cdot p$
- b) A soma dos g arcos é igual a $360^\circ \cdot k$, sendo k o número de voltas necessárias para a fechamento da polígono (espécie da polígono).

Então,

$$\frac{360^\circ}{n} \cdot p \cdot g = 360^\circ \cdot k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{n}{p} \cdot k}, \text{ sendo } k \text{ o menor inteiro positiva que torna inteira}$$

o expressão $\frac{nk}{p}$.

- c) Quando $p = 1$ e $k = 1$, o polígono obtida é convexo de gênero n , como na primeiro exemplo.
- d) Quando n e p são primos entre si, temos $k = p$ e $g = n$, como no segundo exemplo.
- e) Quando n é múltipla de p , temos

$$\frac{n}{p} = n' \quad \text{e} \quad g = n'k$$

Então, $k = 1$ e $g = \frac{n}{p}$, sendo o polígono convexo de gênero

$$\frac{n}{p}.$$

Seria este o caso se dividíssemos um círculo em 8 partes e uníssemos os pontos de dois em dois, obtendo assim um quadrado.

f) Quando n e p admitem fatores comuns, temos

$$\frac{n}{p} = \frac{n'}{p'}, \text{ sendo } n' \text{ e } p' \text{ primas entre si.}$$

Então, como $g = \frac{n'}{p'} \cdot k$, concluímos que $k = p'$ e $g = n'$, sendo o polígono estrelado de gênero $n' < n$, como no terceiro exemplo.

Observação

Consideremos $p < \frac{n}{2}$ pois, unindo os n pontos de divisão de p em p ou de $n - p$ em $n < p$, obteremos o mesmo polígono.

10.3 — LADO E APÓTEMA

Seja l_n^p uma corda de um círculo correspondente a p divisões de um círculo que está dividida em n partes. Assim, l_8^4 ou simplesmente l_8 é a lado do octógono convexo, l_{10}^3 o lado do decágono estrelado de espécie 3.

Vemos, ainda, que, por exemplo, l_{20}^4 é o correspondente ao lado do pentágono convexo ($l_{20}^4 = l_5^1$) e l_{14}^4 é correspondente ao lado da heptágono estrelado de espécie 2 (pois $l_{14}^4 = l_7^2$).

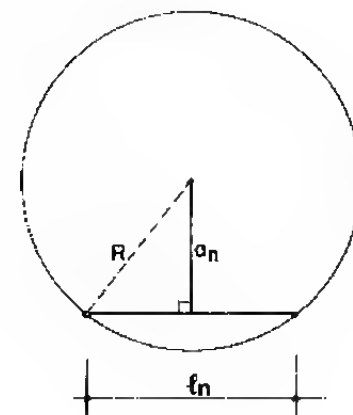
Chamamos de apótema de um polígono regular à distância do centro do círculo circunscrita a um dos lados.

Se p e n são primos entre si, e

$p < \frac{n}{2}$, l_n^p é o lado da polígono de

gênero n e espécie p , a_n^p é o apótema desse polígono. Se um polígono de gênero n está inscrito em um círculo de raio R , temos

$$R^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \quad \text{ou}$$

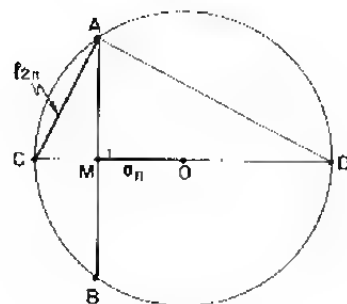


$$a_n = \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}$$

10.4 — DUPLICAÇÃO DO GÊNERO DE UM POLÍGONO CONVEXO

Se l_n é o lado do polígono regular convexo de gênero n , inscrito em um círculo de raio R , calcularemos l_{2n} que é o lado do polígono regular de gênero $2n$ inscrito no mesmo círculo.

Seja $AB = l_n$ e o diâmetro \overline{CD} perpendicular a \overline{AB} . Como $\widehat{AC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$, então $AC = l_{2n}$.



Do triângulo retângulo ACD vem

$$AC^2 = CM \cdot CD$$

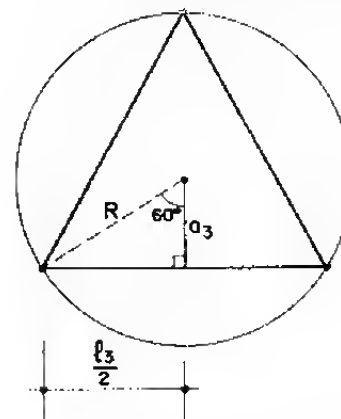
$$(l_{2n})^2 = 2R \cdot \overbrace{(R - a_n)}$$

$$(l_{2n})^2 = 2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_{2n} = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}} \right)}$$

10.5 — CÁLCULO DOS LADOS DOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NUM POLÍGONO DE RAIO R

1 — Triângulo equilátero ($n = 3$)



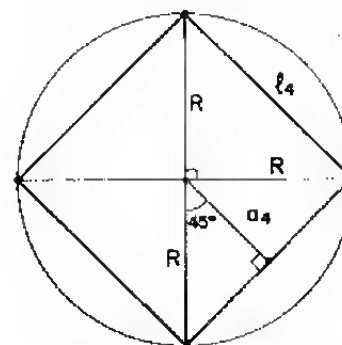
$$\frac{l_3}{2} = R \sin 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_3 = R \sqrt{3}$$

$$a_3 = R \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{R}{2}$$

2 — Quadrado ($n = 4$)



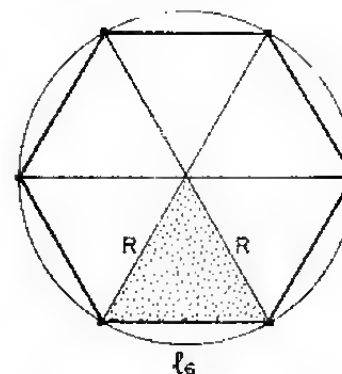
$$(l_4)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$l_4 = R \sqrt{2}$$

$$a_4 = R \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{R \sqrt{2}}{2}$$

3 — Hexágono ($n = 6$, $p = 1$)



Como o hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes, temos

$$l_6 = R$$

$$a_6 = \frac{R \sqrt{3}}{2}$$

Observação

$n = 6$, $p = 2$ forma um triângulo equilátero.

4 — Octógono convexo ($n = 8$, $p = 1$)

Pela fórmula da duplicação, vamos obter l_8 em função de l_4 , cuja valor conhecemos.

$$l_8 = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Para o apótema, temos

$$a_8 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{2})}{4}} \Rightarrow$$

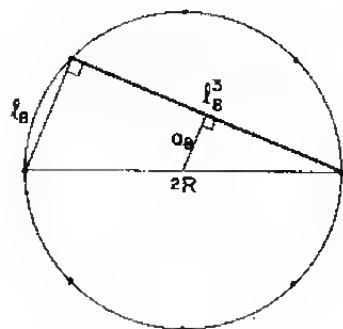
$$\Rightarrow a_8 = \sqrt{\frac{R^2(4 - 2 + \sqrt{2})}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_8 = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Observação.

$n = 8$, $p = 2$ forma um quadrado.

5 — Octógono estrelado ($n = 8$, $p = 3$)



$$\begin{aligned} (l_8^3)^2 &= (2R)^2 - (l_8)^2 \\ &= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2}) \\ &= R^2(4 - 2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_8^3 = R^2 \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Notamos ainda que **CONVÊNIO MEC-FRNAME-SEEMG²³¹**
PLIDEF - MG

$$a_8^3 = \frac{l_8}{2}; \text{ logo,}$$

$$\boxed{a_8^3 = \frac{R}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

6 — Dodecágono convexo ($n = 12$, $p = 1$)

Novamente pela fórmula da duplicação a partir de $l_6 = R$, temos

$$l_{12} = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{12} = R \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

E, para o apótema,

$$a_{12} = \sqrt{R^2 - \frac{R(2 - \sqrt{3})}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Observações

$n = 12$, $p = 2$ forma um hexágono regular

$n = 12$, $p = 3$ forma um quadrado

$n = 12$, $p = 4$ forma um triângulo equilátero

7 — Dodecágono estrelado ($n = 12$, $p = 5$)

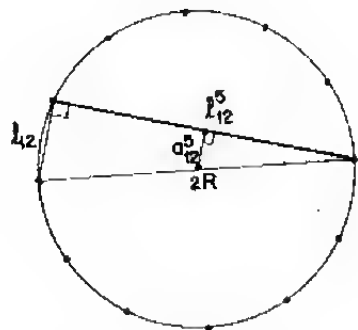
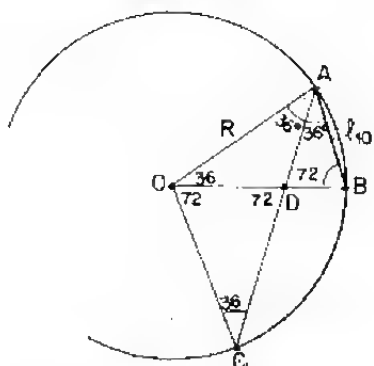
$$\begin{aligned}(l_{12}^5)^2 &= (2R)^2 - (l_{12})^2 = \\ &= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3}) = \\ &= R^2(4 - 2 + \sqrt{3}) =\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Notamos ainda que

$$a_{12}^5 = \frac{l_{12}}{2}; \text{ logo,}$$

$$\boxed{a_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

8 — Décagono convexa ($n = 10$, $p = 1$)

Na figura, onde $\widehat{O} = 36^\circ$, $AB = l_{10}$
e \overline{AD} é bissetriz de \widehat{A} , temos

$$AD = OD = l_{10}$$

$$DB = R - l_{10}.$$

Pelo teorema das bissetrizes,

$$\begin{aligned}\frac{R}{l_{10}} &= \frac{l_{10}}{R - l_{10}} \Rightarrow \\ \Rightarrow (l_{10})^2 + R l_{10} - R^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}\end{aligned}$$

9 — Decágono estrelado ($n = 10$, $p = 3$)

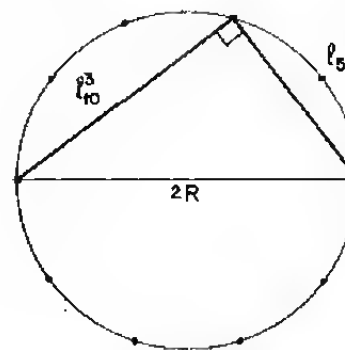
O lado do decágono estrelado l_{10}^3 compreende um arco de $3 \times 36^\circ = 108^\circ$. Assim, na figura anterior, $AC = l_{10}^3$. Mas a triângulo ODC é isósceles e assim

$$DC = R \text{ e } AD = l_{10}$$

Então,

$$l_{10}^3 = l_{10} + R \Rightarrow l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) + R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

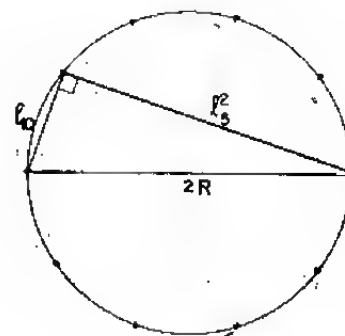
10 — Pentágono convexa ($n = 10$, $p = 2$)

$$(l_5)^2 = (2R)^2 - (l_{10}^2)^2$$

$$(l_5)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$

$$(l_5)^2 = \frac{R^2(16 - 6 - 2\sqrt{5})}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

11 — Pentágono estrelado ($n = 10$, $p = 4$)

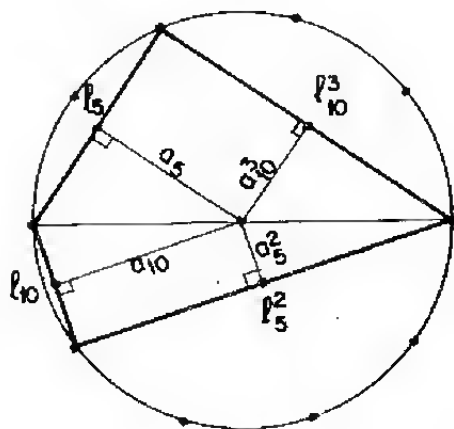
$$(l_5^2)^2 = (2R)^2 - (l_{10}^4)^2$$

$$(l_5^2)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2$$

$$(l_5^2)^2 = \frac{R^2(16 - 6 + 2\sqrt{5})}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Para a cálculo dos apótemas dos decâgonos e pentâgonos, observemos a figura abaixo.



Vemos que

$$a_5 = \frac{l_{10}}{2}$$

$$a_5^2 = \frac{l_{10}}{2}$$

$$a_{10} = \frac{l_5^2}{2}$$

$$a_{10}^3 = \frac{l_6}{2}$$

10.6 — COMPRIMENTO DO CÍRCULO

Demonstraremos, inicialmente, que os comprimentos de dois círculos são proporcionais a seus diâmetros.

Demonstração

Sejam dois círculos de comprimentos C e C' e raios R e R' . Seja x um segmento tal que

$$x = \frac{R'}{R} \cdot C$$

Consideremos dois polígonos regulares convexos semelhantes inscritos nos dois círculos. Podemos escrever

$$\frac{l_n}{l'_n} = \frac{R}{R'}$$

Como $n \cdot l_n = 2p$ e $n \cdot l'_n = 2p'$, temos

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'}$$

mos, por (1), temos

$$\frac{R}{R'} = \frac{C}{x}$$

• então

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{C}{x}$$

ou

$$x = \frac{C}{2p} \cdot 2p'$$

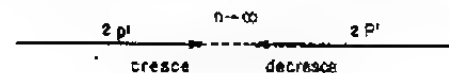
Como a relação $\frac{C}{2p}$ é maior que a unidade, $x > 2p'$. Analogamente, circunscrevendo dois polígonos regulares semelhantes de perímetros $2P$ e $2P'$, temos

$$\frac{2P}{2P'} = \frac{C}{x} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{C}{2P} \cdot 2P'.$$

Como a relação $\frac{C}{2P}$ é menor que a unidade, $x < 2P'$.

Vemos que x está compreendido sempre entre $2p'$ e $2P'$.



Quando a número de lados cresce indefinidamente, $x = C'$. Voltando, então, em (1), temos

$$C' = \frac{R'}{R} \cdot C \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \text{cte}}$$

Naturalmente que é constante a relação entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro. Chomamos isso constante de π . Então,

$$\frac{C}{2R} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

Para que possamos ter uma idéia do número π , construímos uma tabela, utilizando perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos divididos por $2R$. Os lados desses polígonos foram obtidos pela fórmula da duplicação do gênero, a partir do hexágono regular.

Sejam

$n = n.^{\circ}$ de lados do polígono

$2p =$ perímetros dos polígonos inscritos

$2P =$ perímetros dos polígonos circunscritos

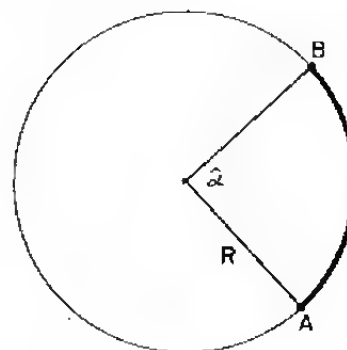
$R =$ raio do círculo

n	$\frac{2p}{2R}$	$\frac{2P}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14156	3,14167

Notamos que os números da primeira coluna crescem e os da segunda decrescem, tendendo para o número π , que apresentamos com as vinte primeiras decimais.

$$\pi = 3,14159265358979323846 \dots$$

10.7 — COMPRIMENTO DE UM ARCO



Seja C_{AB} o comprimento do arco \widehat{AB} . Como este comprimento é proporcional à sua medida, temos

$\hat{\alpha}$ em graus

$$360^{\circ} \rightarrow 2\pi R$$

$$\alpha \rightarrow C_{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} 360^{\circ} \rightarrow 2\pi R \\ \alpha \rightarrow C_{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C_{AB} = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R}$$

$\hat{\alpha}$ em radianos

$$2\pi \text{ rd} \rightarrow 2\pi R$$

$$\alpha \rightarrow C_{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ rd} \rightarrow 2\pi R \\ \alpha \rightarrow C_{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C_{AB} = \alpha R}$$

10.8 — CÁLCULO DE π

Consideremos um círculo de raio R e um polígono regular inscrito de n lados e perímetro $2p$.

Este perímetro é menor que o comprimento do círculo, mas tende a esse valor quando o número de lados cresce indefinidamente.

Temas

$$\pi = \frac{C}{2R} \text{ e, fazendo } R = 1,$$

$$\pi = \frac{C}{2}$$

Consideremos, agora, polígonos regulares inscritos no círculo de raio unitária, tendo cada um o dobro do número de lados do anterior. Utilizaremos, para isso, a fórmula da duplicação dos gêneros.

$$l_4 = \sqrt{2}$$

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$l_{16} = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Analogamente,

$$l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

escreveremos l_{2n} como $l_{2^4 + 1}$, sendo 4 o número de radicais. Assim,

$$l_{2n} + 1 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

com n radicais.

Esse polígono possui gênero igual a 2^{n+1} e seu perímetro é

$$2^{n+1} \cdot l_{2n} + 1.$$

Quando o número de lados cresce indefinidamente, esse valor tende para o comprimento do círculo que, para $R = 1$, é igual ao dobro do número π . Assim, dividindo por 2, temos

$$\pi = 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

com n radicais.

10.9 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

351. Calcule a área do hexágono regular inscrito em um círculo de raio igual a 6.

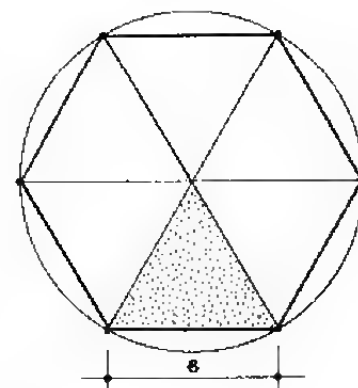
Solução

$$l_6 = R = 6$$

A área do hexágono regular é igual a 6 vezes a área do triângulo equilátero de lado igual a 6. Então,

$$S = 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}.$$

Resposta: $54\sqrt{3}$ u. o.



352. Calcule a área do polígono regular convexa de perímetro $2p$ e apótema a .

Solução

Seja l o comprimento do lado e n , seu gênero. Como o polígono regular pode ser dividido em n triângulos de base l e altura a ,

temos

$$S = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}. \text{ Mas } nl = \text{perímetro do polígono} = 2p.$$

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} \Rightarrow S = p \cdot a$$

Resposta: $S = pa$

353. Calcule o lado do polígono regular convexo de 24 lados.

Solução

Poderemos calcular l_{24} partindo de l_{12} , que conhecemos pelo fórmula da duplicação do gênero.

$$l_{24} = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{l_{12}^2}{4}} \right)}. \text{ Como } l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$l_{24} = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4}} \right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{2R \left(R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - 2R^2 + R^2 \sqrt{3}} \right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{R(2R - R\sqrt{2 + \sqrt{3}})}$$

$$l_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Resposta: $R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

354. A razão entre os comprimentos de dois círculos é k . Calcule a razão entre suas áreas.

Solução

$$\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2} = k = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = k^2$$

Resposta: k^2 .

355. O comprimento de um círculo de raio R_1 é igual ao comprimento de um arco de 30° de um círculo de raio R_2 . Se a área do primeiro é igual a 2, calcule a área do segundo.

Solução

Comprimento do círculo de raio $R_1 = 2\pi R_1$

Comprimento do arco de 30° do círculo de raio

$$R_2 = \frac{30}{360} \cdot 2\pi R_2 = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R_2$$

$$\text{Igualando,} \quad 2\pi R_1 = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{12}$$

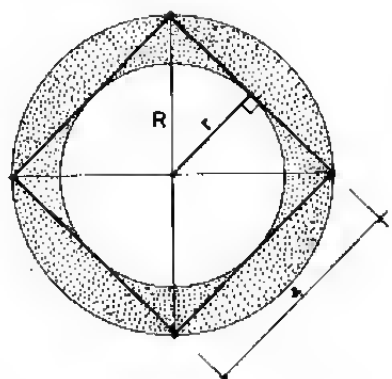
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{144} \quad \text{Se } S_1 = 2,$$

$$\frac{2}{S_2} = \frac{1}{144} \Rightarrow S_2 = 288$$

Resposta: 288

356. Calcule a área da coroa circular limitada pelos círculos inscrito e circunscrito a um quadrado de lado 4.

Solução



$$l_4 = 4 = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = r = \frac{4}{2} = 2$$

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

$$S = \pi[(2\sqrt{2})^2 - 2^2] = 4\pi$$

Resposta: 4π .

357. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 os vértices de um pentágono regular convexo inscrito em um círculo de raio unitária. Calcule a praduta.

$$P = P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \cdot P_1P_5$$

Solução

Como

$$P_1P_2 = P_1P_5 = l_5 \text{ e}$$

$$P_1P_3 = P_1P_4 = l_5^2, \text{ temos}$$

$$P = (l_5)^2 \cdot (l_5^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4}(10 + 2\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{16}(100 - 20) = \frac{80}{16} = 5.$$

Resposta: 5.

Observação

Este problema pode ser generalizado. Cabe ao leitor interessada demonstrar que, se $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ são vértices de um

polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio igual a 1, $P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \cdot \dots \cdot P_1P_n = n$.

358. O comprimento de um círculo é 12π . Um arco AB deste círculo tem comprimento igual a 5π . Calcule em graus a medida do arco AB.

Solução

$$12\pi = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

$$5\pi = \alpha$$

Resposta: 150°

PROBLEMAS PROPOSTOS

359. A área do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio unitária é:

A) $3\sqrt{3}$

C) $4\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

D) $6\sqrt{3}$

E) NRA.

360. Calcule a distância entre dois lados opostos de um hexágono regular de lado $2\sqrt{3}$.

A) $2\sqrt{6}$

C) 4

B) $3\sqrt{3}$

D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

E) 6

361. Calcule a razão entre as áreas dos quadrados inscrita e circunscrito ao mesmo círculo.

A) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{8}$

E) NRA.

362. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos equiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo círculo.

- A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
 B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$
 E) $\frac{1}{9}$

363. Calcule o comprimento do círculo circunscrito a um triângulo equilátero sabendo que o círculo nele inscrito tem comprimento igual a 8π .

- A) 16π C) 32π
 B) 24π D) 48π
 E) 64π

364. A área do círculo circunscrito a um triângulo equilátero mede 400π . A área do triângulo equilátero mede:

- A) 300π C) $600\sqrt{3}$
 B) $300\sqrt{3}$ D) 600π
 E) NRA.

365. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 48 lados?

- A) 5 C) 7
 B) 6 D) 8
 E) 9

366. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 32 lados?

- A) 4 C) 6
 B) 5 D) 7
 E) NRA.

367. Quando se divide um círculo em 84 partes e se une os pontos de divisão dois a dois, obtêm-se:

- A) um polígono convexo de 84 lados
 B) um polígono de 84 lados e espécie 7
 C) um dodecágono de espécie 7
 D) um dodecágono convexo
 E) NRA.

368. Quando se divide um círculo em 90 partes e se une os pontos de divisão dois a dois, obtêm-se:

- A) um polígono estrelado de 90 lados
 B) um polígono convexo de 24 lados
 C) um pentadecágono estrelado
 D) um eneágono convexo
 E) NRA.

369. Dividindo-se um círculo em 47 partes iguais, quantos polígonos diferentes podem ser construídos?

- A) 21 C) 23
 B) 22 D) 24
 E) NRA.

370. O lado de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio R é

- A) $R\sqrt{3}$ C) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$
 B) $2R\sqrt{3}$ D) $3R\sqrt{3}$
 E) NRA.

371. Calcule o perímetro do hexágono circunscrito a um círculo de raio R.

- A) $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ C) $3R\sqrt{3}$
 B) $2R\sqrt{3}$ D) $4R\sqrt{3}$
 E) $6R\sqrt{3}$

372. Calcule a área do hexágono cujos vértices são os pontos médios dos lados de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 4.

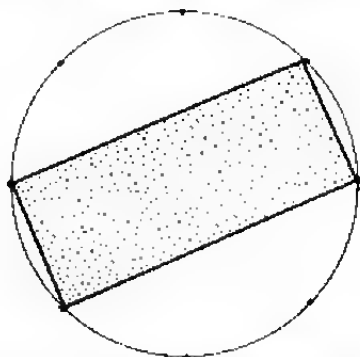
- A) $12\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$
 B) $18\sqrt{3}$ D) $30\sqrt{3}$
 E) NRA.

373. Calcule a distância entre dois lados opostos de um octógono regular inscrito em um círculo de raio unitário.

- A) $\sqrt{2}$ C) $2 + \sqrt{2}$
 B) $\sqrt{2} + 1$ D) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 E) NRA.

374. Um círculo de raio $\sqrt{2}$ está dividido em 8 partes iguais, como mostra a figura. A área do retângulo assinalado é:

- A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 2
D) 4
E) NRA.



375. Sejam l_5 e l_{10}^3 os lados do pentágono regular convexo e do decágono regular estrelado inscritos em um círculo de raio 1. Então, $(l_5)^2 + (l_{10}^3)^2$ é igual a:

- A) 1
B) 2
C) 4
D) 10
E) NRA.

376. Calcule a altura de um trapézio isósceles inscrito em um círculo de raio 2 sabendo que as bases estão situadas em semiplanos opostos determinados por um diâmetro paralelo e são iguais aos lados do triângulo equilátero e hexágono regular inscritos nesse círculo.

- A) $\sqrt{3} + 1$
B) $\sqrt{3} - 1$
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3} + 2$
E) NRA.

377. O lado do octágono regular inscrito num círculo de raio R mede $\sqrt{2}$. Então, R vale:

- A) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
B) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2} - \sqrt{2}$
E) NRA.

378. Os cotetos de um triângulo retângulo são iguais ao lado do hexágono e do decágono regulares convexos inscritos num mesmo círculo. A hipotenusa desse triângulo é:

- A) l_{10}^2
B) l_5
C) l_5^2
D) l_5
E) NRA.

379. (CICE — 68) Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r . Assinale qual das seguintes relações é verdadeira.

- A) $p + 2n\sqrt{2}r$
B) $p + (n+1)\sqrt{5}r$
C) $p < 7r$
D) $p > 8r$

$$E) p = \frac{n^2}{2} \sqrt{3}r$$

380. As cordas AB e CD que não se cortam no interior de um círculo de raio R medem, respectivamente, $\frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ e $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. As retas AC e CD formam ângulo de:

- A) 36°
B) 21° ou 51°
C) 57° ou 87°
D) o problema está indeterminado
E) NRA.

381. Considere dois dodecâgonos regulares convexos de lados 2 e 4. Calcule o lado do dodecágono regular convexo cuja área seja a soma das áreas dos dois primeiros.

- A) 6
B) $\sqrt{6}$
C) 8
D) $2\sqrt{5}$
E) NRA.

382. Considere um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em um círculo de raio unitário. Então, $l_3 + l_4$ é aproximadamente igual a:

- A) 3
B) π
C) e (base dos logaritmos neperianos)
D) $\frac{24}{7}$
E) $\frac{23}{6}$

383. As duas tangentes traçadas de um mesmo ponto a um círculo de raio 2 determinam dois arcos sobre o círculo, sendo o menor de comprimento $\frac{\pi}{3}$. O ângulo entre as tangentes é:

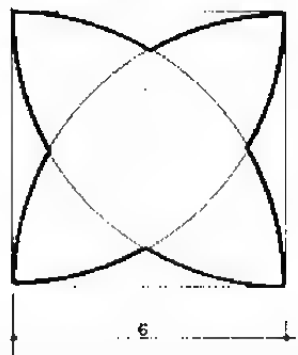
- A) 100°
B) 120°
C) 135°
D) 150°
E) 160°

384. A distância entre os pontos A e B é 3. Traçam-se círculos de raio 3 com centros em A e B, que se cortam em M e N. Calcule o perímetro da figura curvilínea AMBN.

A) π C) 4π
 B) 2π D) 6π
 E) NRA.

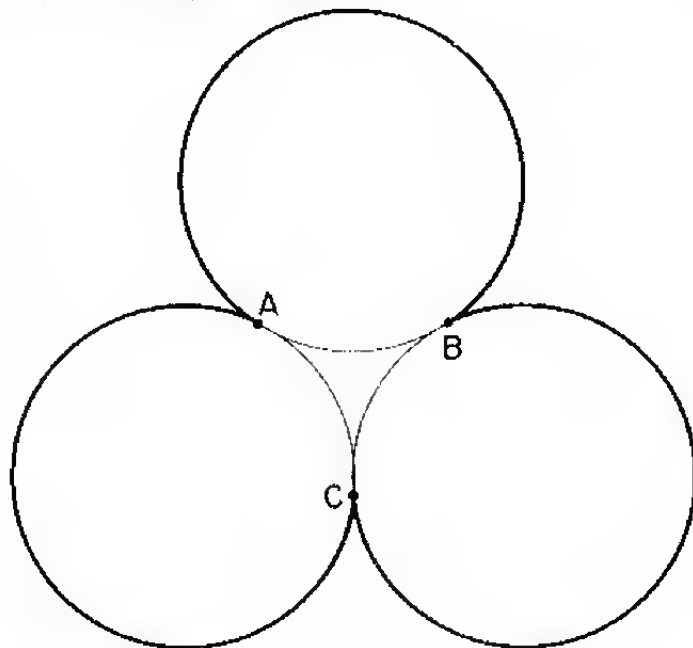
385. Considere o quadrado de lado 6 da figura. Calcule o perímetro da figura assinalada.

A) 6π
 B) 8π
 C) 12π
 D) 16π
 E) NRA.



386. Os três círculos da figura são tangentes entre si, dois a dois, nos pontos A, B e C. Se o raio de cada um deles é igual a 1, o perímetro da figura curvilínea formada pelos maiores arcos AB, BC e CA mede:

A) 3π
 B) 4π
 C) 5π
 D) 6π
 E) 9π



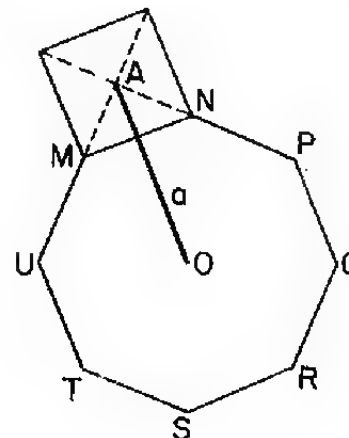
387. Duas diagonais de um pentágono regular de lado L cortam-se segundo dois segmentos m e n. Calcule estes segmentos em função de L.

388. Os pontos A, B, C e D são vértices consecutivos de um decágono regular de lado L inscrito em um círculo de centro O e raio R. A diagonal AD corta o raio OB em J. Calcule os segmentos AJ e JD.

389. Calcule a razão entre os perímetros dos dodecâgonos inscrito e circunscrito a um mesmo círculo.

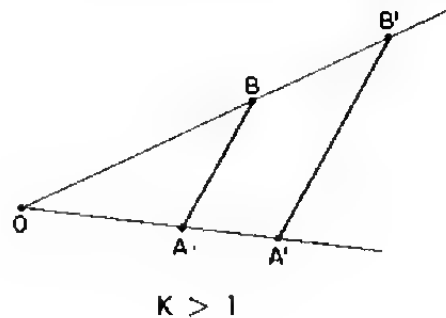
390. Considere um pentágono regular convexo ABCDE de centro O. A reta AO encontra BE em M e DC em N. Demonstre que os pontos A, M, O e N formam uma divisão harmônica.

391. (IME — 67) A figura abaixo mostra o octógono MNPQRSTU e um quadrado construído tendo por base MN. Sabendo que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determine a área do quadrado em função de a.



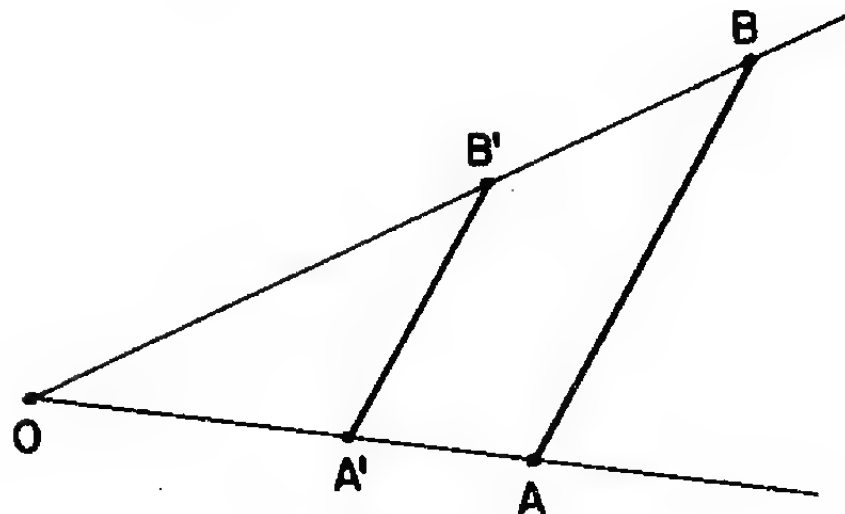
A-1 — HOMOTETIA

1.1 — Dados em um plano os pontos O e A , e um número real $k \neq 0$, chama-se *homotetia* de centro O e razão (ou característica) k à transformação que a todo ponto A faz corresponder um ponto A' tal que $\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA}$ chomaremos de $\text{Hom}(O, K)$.

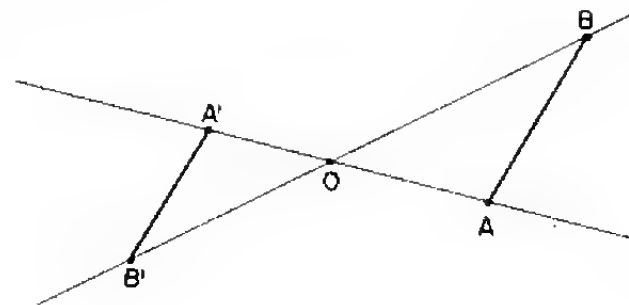


homotetia
direta

$K > 1$



$0 < K < 1$

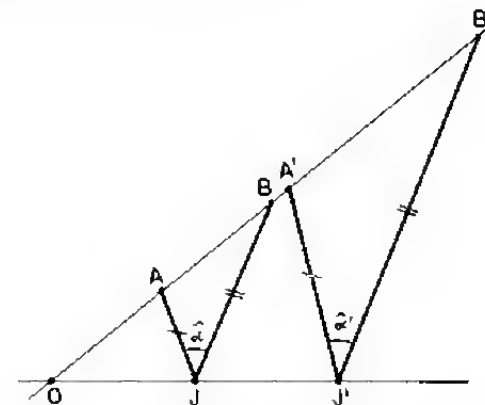


homotetia
inversa

$K < 0$. (*)

Da própria definição decorre que as triângulos CAB e $OA'B'$ são semelhantes, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$. Portanto, a homotetia transforma uma reta em outra paralela distinta, caso k seja diferente de 0 e de 1 , e caso a reta não contenha o centro O .

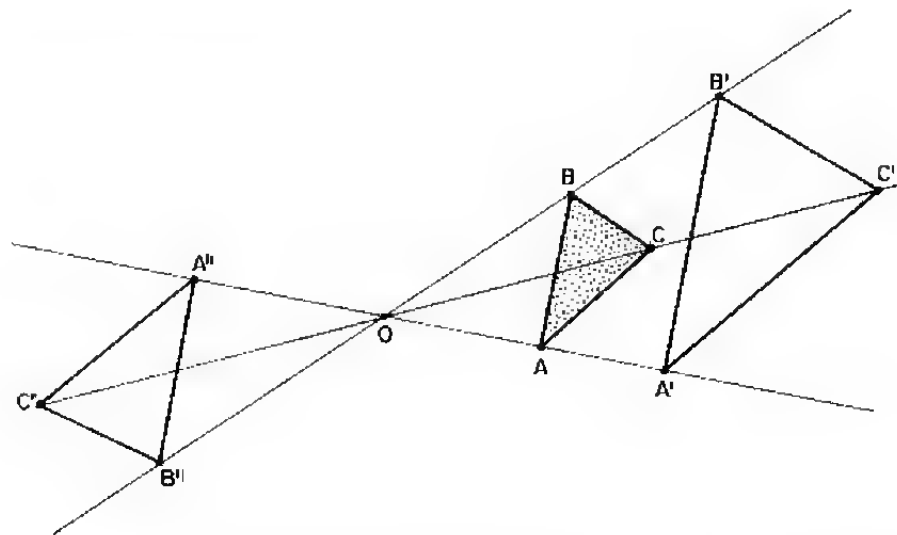
1.2 — A figura homotética de um ângulo \widehat{AJB} é um ângulo $\widehat{A'J'B'}$ congruente com o primeiro.



De fato, como $\overline{JA} \parallel \overline{J'A'}$ e $\overline{JB} \parallel \overline{J'B'}$, independentemente da razão, $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$.

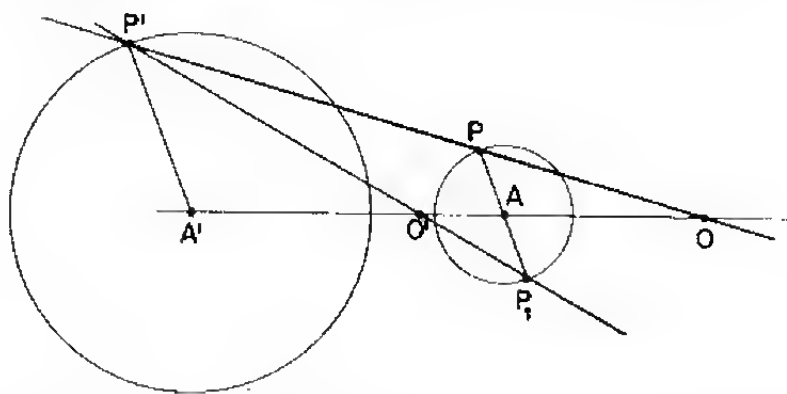
* Se $k = -1$, a transformação é uma simetria de centro O .

1.2.1 — A figura homotética de um triângulo (polígono) é um outro semelhante ao primeiro.



Este fato decorre imediatamente da definição e propriedades anteriores.

1.3 — A figura homotética de um círculo é um outro círculo.



Seja um círculo de centro A e raio R. Se o imaginarmos formada pelas extremidades dos segmentos AP, todos congruentes, a figura deste círculo transformada em uma homotetia será formada pelos extremos

dos segmentos $\overline{A'P'}$, todos congruentes e de comprimento igual a $|k| \cdot AP$. Assim, concluímos que:

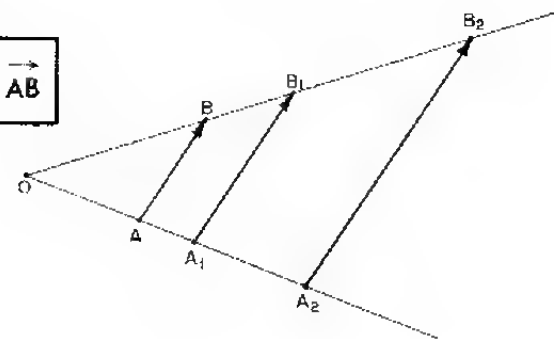
- 1) A figura transformada de um círculo (A, R) em uma $\text{Hom}(O, K)$ é um círculo $(A', |K| R)$, onde $\overrightarrow{OA'} = K \cdot \overrightarrow{OA}$.
- 2) Dados dois círculos não concêntricos e de raios diferentes existem sempre duas homotetias que transformam um deles no outro.
- 3) As tangentes comuns a dois círculos passam pelo centro de homotetia.

1.4 — Produto de homotetias

1.4.1. — Produto de homotetias de mesmo centro.

Sejam $\text{Hom}(O, K_1)$ e $\text{Hom}(O, K_2)$ duas homotetias. A primeira transforma um vetor \overrightarrow{AB} em outro $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ e a outra transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em outro $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Por simples substituição vemos que

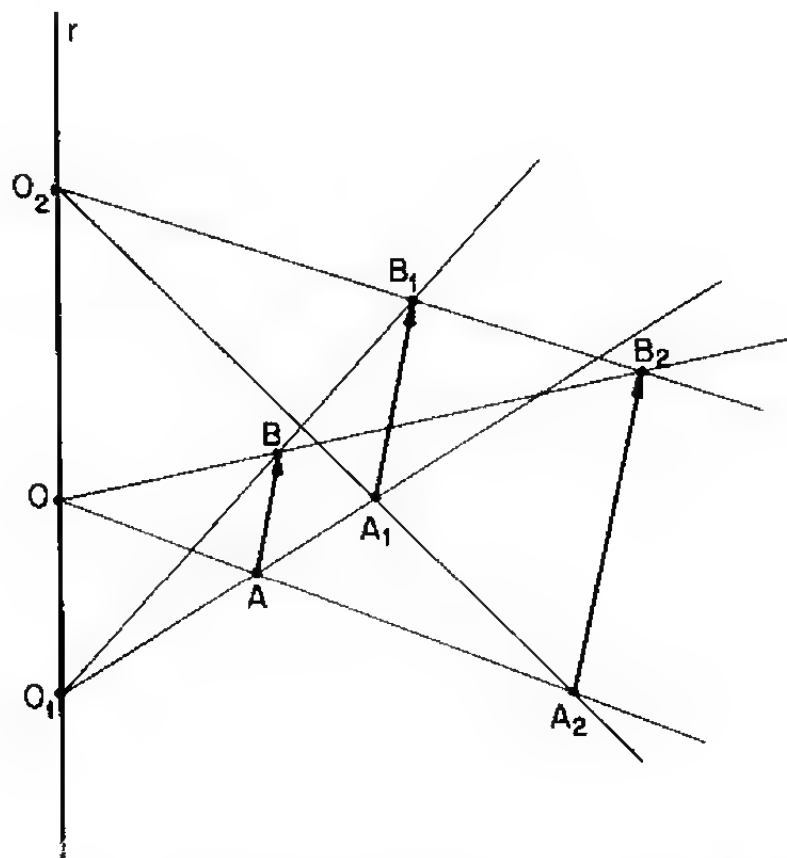
$$\overrightarrow{A_2B_2} = K_1 \cdot K_2 \cdot \overrightarrow{AB}$$



o que mostra que a $\text{Hom}(O, k_1 \cdot k_2)$ transforma \overrightarrow{AB} em $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Vemos, também, que o produto de homotetias é comutativo, não influenciando a ordem em que são feitas as transformações.

1.4.2. — Produto de homotetias de centros distintos.



Consideremos, agora, $\text{Hom}(O_1, K_1)$ e $\text{Hom}(O_2, K_2)$. A primeira transforma \overrightarrow{AB} em $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ e a segunda transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Vemos também que, como

$$\overrightarrow{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overrightarrow{AB},$$

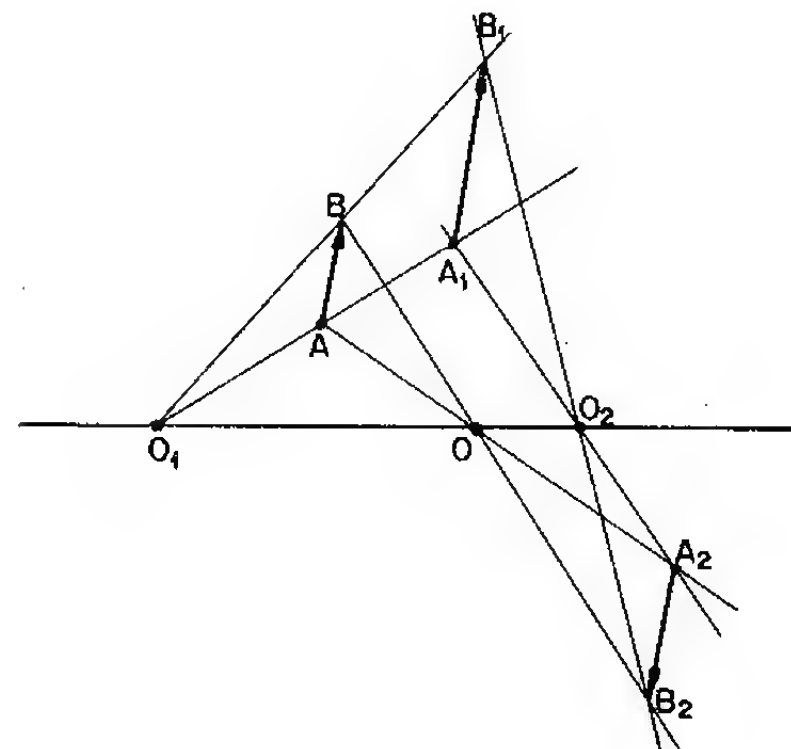
existe uma homotetia de centro O e razão $k_1 \cdot k_2$ que transforma \overrightarrow{AB} em $\overrightarrow{A_2B_2}$. (*)

* $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ para que exista O perfeitamente determinado.

Concluimos, então, que:

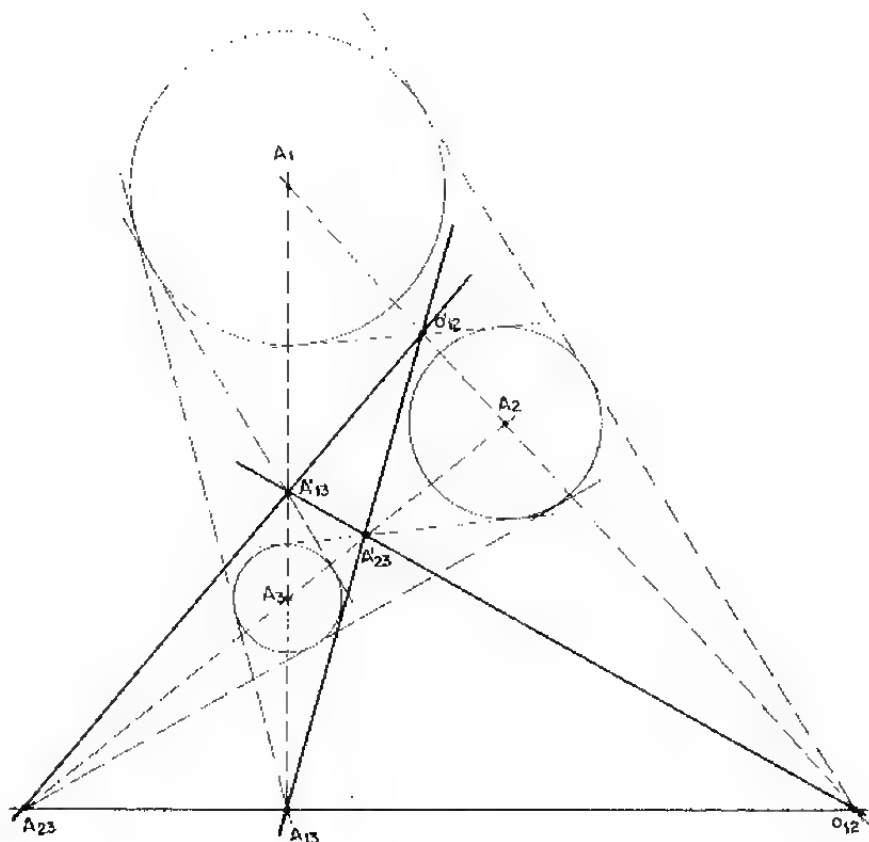
1) O, O_1 e O_2 são colineares.

De fato, seja r a reta que contém O_1 e O_2 . Na primeira transformação, $r_1 \equiv r$ e, na segunda, $r_2 \equiv r_1 \equiv r$. Como $r_2 \equiv r$, então r contém o centro O da homotetia que transforma \overrightarrow{AB} em $\overrightarrow{A_2B_2}$.



2) A homotetia produto será *direta* se as duas primeiras forem ambas *diretas* ou ambas *inversas* e será *inverso* se uma for *direta* e outra *inversa*.

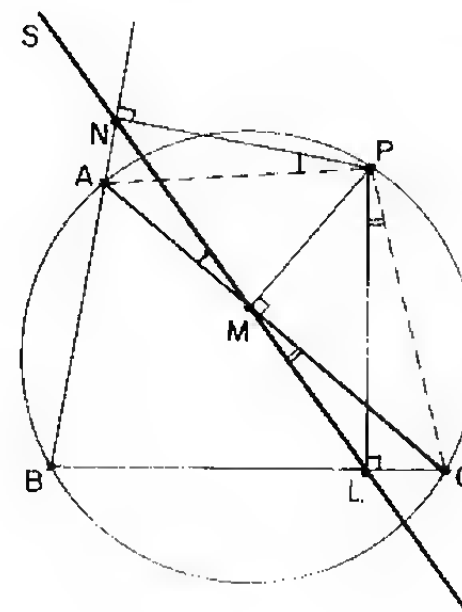
- 3) Três círculos de raios distintos e dois não concêntricos determinam sempre seis centros de homotetia.



Este fato decorre imediatamente das propriedades anteriores.

A-2 — A RETA DE SIMPSON-WALLACE

2.1 — Os pés das perpendiculares traçados de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo aos lados desse triângulo são colineares.



Porque as quadriláteras PMAN e PMLC são inscritíveis,

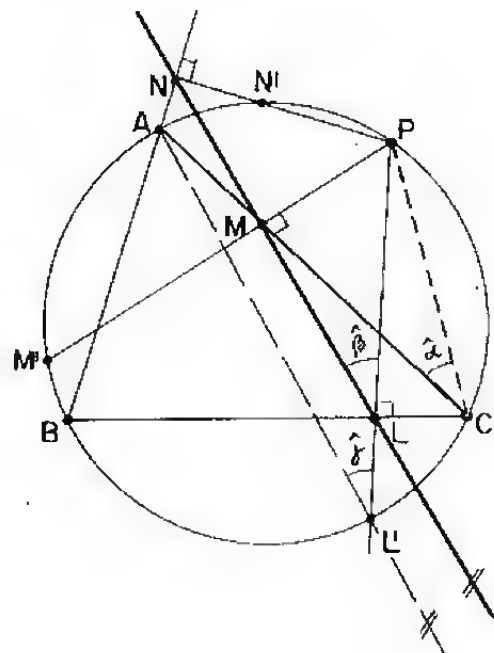
$$\widehat{NPA} = \widehat{NMA} \quad \text{e} \quad \widehat{CPL} = \widehat{CML}.$$

Porque os quadriláteros BNPL e BAPC são inscritíveis,

$$\widehat{NPL} = \widehat{APC}, \text{ pois são suplementos de } \widehat{B}.$$

Isto é, $\widehat{NPA} = \widehat{CPL}$ ou $\widehat{NMA} = \widehat{CML}$, o que mostra que as pontos L, M e N são colineares. A reta que os contém é chamada reta de Simpson, reta de Wallace ou simplesmente simson do ponto P.

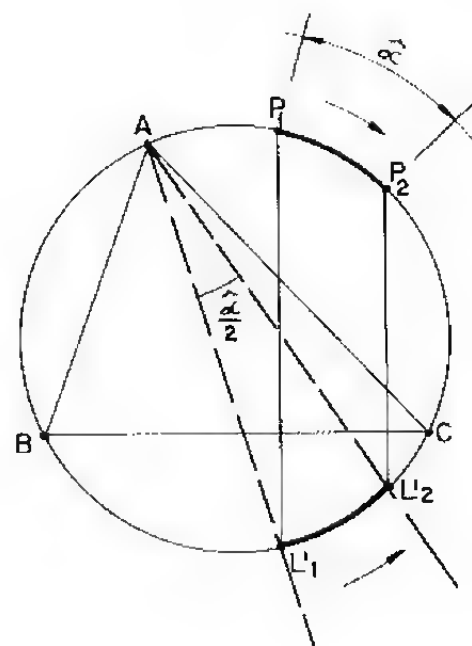
- 2.2 — Se os perpendiculares de um ponto P do círculo circunscrito a um triângulo ABC aos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} encontram novamente o círculo em L' , M' e N' , os retos $\overline{AL'}$, $\overline{BM'}$ e $\overline{CN'}$ são paralelos à simson do ponto P .



$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= \hat{\gamma} \\ \hat{\alpha} &= \hat{\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &= \frac{\widehat{AP}}{2} \\ &\text{(quadrilátero inscrito PMLC)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \hat{\gamma} \Rightarrow \overline{AL'} \parallel S.$$

- 2.3 — Se o ponto P move-se sobre o círculo circunscrito de um arco de medido $\hat{\alpha}$, o reto de Simpson move-se de um ângulo de medida $\frac{\hat{\alpha}}{2}$ no sentido contrário à rotação de P .



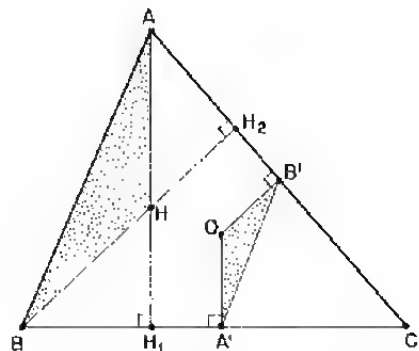
$$\widehat{P_1 P_2} = \widehat{L_1' L_2'} = \hat{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{L_1' A L_2'} = \frac{\hat{\alpha}}{2}.$$

- 2.4 — A reto de Simpson de um ponto P divide ao meio o segmento que une o ortocentro do triângulo ao ponto P .
- 2.5 — Os simétricos de um ponto do círculo circunscrito em relação aos lados do triângulo inscrito estão sobre uma reta paralelo à de Simpson passando pelo ortocentro do triângulo.
- 2.6 — O ângulo formado pelas retos de Simpson de um ponto P em relação a dois triângulos inscritos é o mesmo para qualquer posição de P .

A-3 — A RETA DE EULER — O CÍRCULO DOS NOVE PONTOS

3.1 — A distância de um circuncentra de um triângulo a um dos lados é a metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.



Como $\overline{OA'} \parallel \overline{HA}$,

$\overline{OB'} \parallel \overline{HB}$,

$\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, e

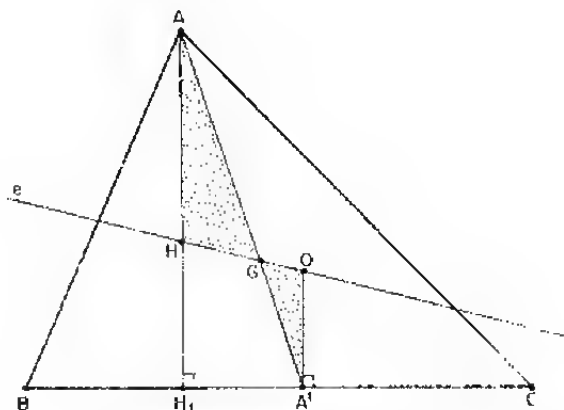
$$A'B' = \frac{1}{2} AB,$$

os triângulos $OA'B$ e HAB

são semelhantes na razão $\frac{1}{2}$, sendo

$$OA' = \frac{1}{2} HA.$$

3.2 — Em um triângulo, a ortocentro, a baricentro e o circuncentro estão alinhadas.



Como A' é média de \overline{BC} , AA' é uma mediana, os triângulos AHG e GOA' são semelhantes, e sendo

$$\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2} \text{ a razão}$$

de semelhança, en-

$$\text{tão } GA' = \frac{1}{2} GA,$$

sendo G , portanto, a baricentro do triângulo.

A reta que contém a ortocentro, o baricentro e a circuncentra de um triângulo é chamada reta de Euler do triângulo.

3.3 — O baricentro de um triângulo divide o segmento que une o ortocentro ao circuncentra na razão $\frac{1}{2}$.

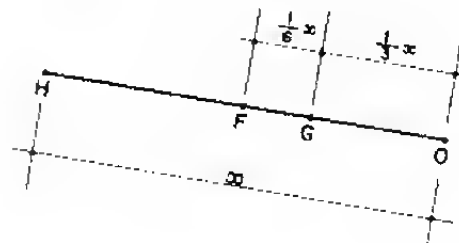
Como os triângulos AHG e GOA' são semelhantes na razão $\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2}$, logo

$$GO = \frac{1}{2} GH.$$

3.4 — Círculo dos nove pontos

Transformemos a círculo circunscrita de um triângulo pela Ham $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Seja F a centra da nova círculo. Ele é tal que

$$GF = -\frac{1}{2} GO.$$

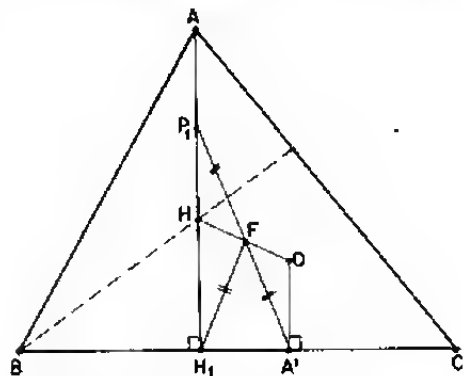


De acordo com a figura,

$$FO = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) x$$

$$\Rightarrow FO = \frac{1}{2} x$$

Logo, o centro do círculo transformado é a ponto médio do segmento \overline{OH} . Ora, segundo a Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, as pontos A, B e C transformam-se em A', B' e C' médios dos lados do triângulo.



Cama F é médio de \overline{OH} , $\overline{FA} = \overline{FH_1}$, o que mostra passar este círculo também pelos pés das alturas do triângulo.

Da congruência dos triângulos FOA' e FHP₁, temos

$$OA' = HP_1 = \frac{1}{2} HA.$$

Logo, P₁ é médio do segmento \overline{HA} e, como $FA' = FP_1$, vemos também que este círculo passa pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices e que são chamados de pontos de Euler do triângulo.

Como transformamos o círculo circunscrito segundo o Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$,

o raio do círculo dos nove pontos tem raio $\frac{R}{2}$.

Assim, o círculo dos nove pontos:

a) tem raio $\frac{R}{2}$,

b) tem centro no ponto F, médio de \overline{OH} ,

c) contém

A', B', C' → pontos médios dos lados

H₁, H₂, H₃ → pés das alturas

P₁, P₂, P₃ → pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

3.5 — Os triângulos ABC, BCH, CAH e ABH possuem o mesmo círculo dos nove pontos.

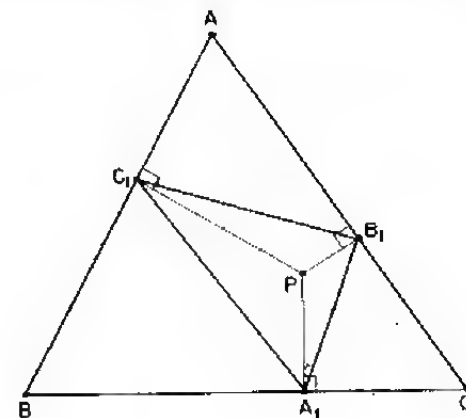
Observação: o círculo inscrito e os três círculos exinscritos são chamados de círculos tritangentes.

3.6 — Teorema de Feuerbach

Cada um dos triângulos ABC, BCH, CAH e ABH definem quatro círculos tritangentes. Estes 16 círculos são tangentes ao círculo dos nove pontos.

A-4 — TRIÂNGULOS PEDAIS

4.1 — Seja P um ponto do plano de um triângulo ABC e sejam $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$ e $\overline{PC_1}$ os perpendiculares traçados por P aos lados BC, AC e AB do triângulo. Se P não pertence ao círculo circunscrito, o triângulo A₁B₁C₁ é chamado triângulo pedal de P.



4.2 — Lados do triângulo pedal

Como AC_1PB_1 é inscritível, pelo Lei dos Senos,

$$\frac{B_1C_1}{\sin A} = PA; \text{ mos } \frac{a}{\sin A} = 2R \implies$$

$$\implies B_1C_1 = \frac{a \cdot PA}{2R}.$$

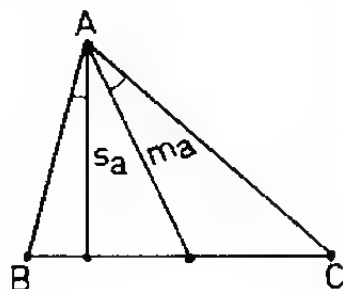
Assim, se x , y e z são as distâncias de P aos vértices A , B e C , os lados do triângulo pedal medem

$$\frac{ax}{2R}, \frac{bx}{2R} \text{ e } \frac{cx}{2R}.$$

A-5 — AS SIMEDIANAS

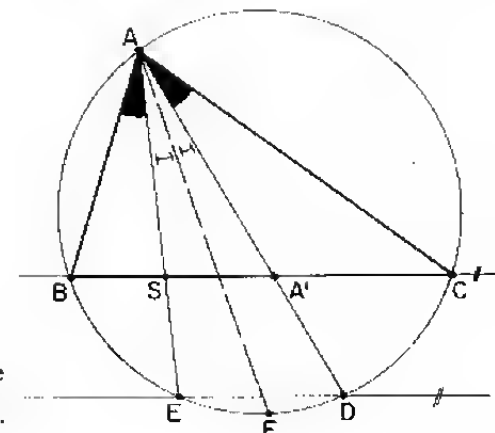
5.1 — A isogonal de uma mediana chama-se *simediana*.

5.2 — A bissetriz de um ângulo de um triângulo é também bissetriz do ângulo formado pela mediana e simediana traçadas do mesmo vértice.

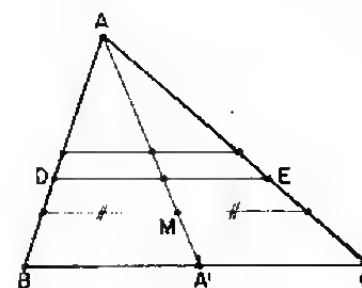


5.3 — Se D e E são os pontos em que a mediana e simediana encontram o círculo circunscrito a um triângulo ABC , então DE é paralelo a BC .

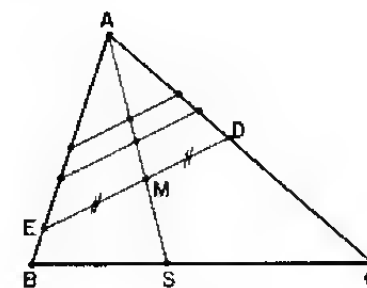
Como F é médio de BC e $\widehat{BE} = \widehat{DC}$, logo $DE \parallel BC$.



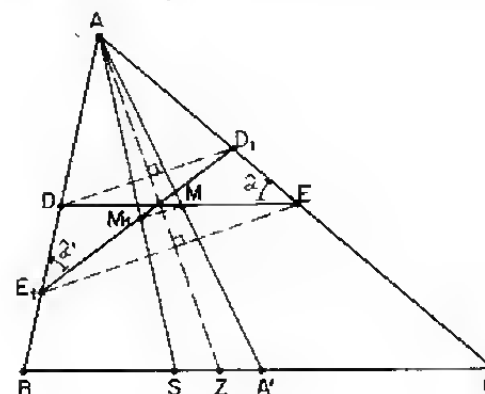
5.4 — A simediana relativa ao lado a de um triângulo ABC divide ao meio qualquer antiparalelo ao lado BC .



$\left. \begin{array}{l} AA' \rightarrow \text{mediana} \\ DE \parallel BC \end{array} \right\} \implies DM = ME.$



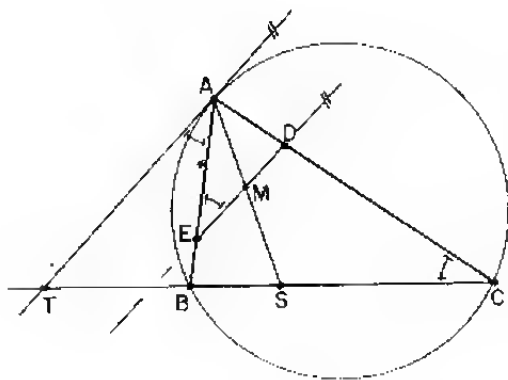
$\left. \begin{array}{l} AS \rightarrow \text{simediana} \\ DE \text{ onti } \parallel BC \end{array} \right\} \implies DM = ME.$



A demonstração é elementar. Seja AA' uma mediana, $DE \parallel BC$, sendo M médio de DE . A simetria em relação à bissetriz AZ do ângulo A leva a mediana AA' na simediana AS , D em D_1 , E em E_1 e M em M_1 .

Concluimos imediatamente que $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$, sendo, portanto, $\overline{D_1E_1}$ e \overline{BC} antiparalelas em relação aos lados do ângulo \hat{A} , e que, se M é média do \overline{DE} , então M_1 é médio de $\overline{D_1E_1}$.

5.5 — Em um triângulo ABC , a pé da simediana e o pé da tangente ao círculo circunscrito, traçadas por A , dividem harmonicamente o lado \overline{BC} .



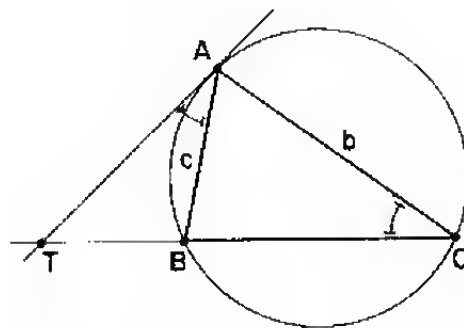
Ora, como $\hat{C} = \hat{AED} = \hat{BAT}$, a antiparalela \overline{DE} é paralela à tangente \overline{AT} , e, como M é médio de \overline{DE} , a feixe $A(TBSC)$ é harmônica (V. 3.9.2).

5.6 — O ponto S , pé da simediana traçada pela vértice A de um triângulo ABC , divide o lado \overline{BC} na razão $\frac{c^2}{b^2}$.

Como a razão $\frac{SB}{SC}$ é igual a $\frac{TB}{TC}$, calcularemos esta última.

Da semelhança dos triângulos ABT e CAT , temos

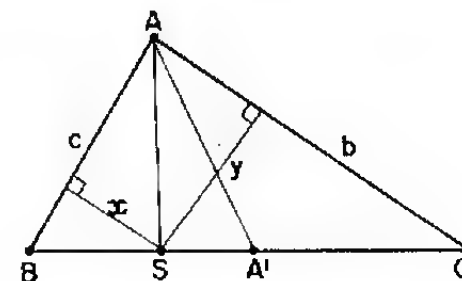
$$\frac{TA}{TC} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{TA^2}{TC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$



$$\text{mas } TA^2 = TB \cdot TC \Rightarrow \frac{TB \cdot TC}{TC^2} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$$

5.7 — As distâncias de qualquer ponto da simediana aos lados adjacentes são proporcionais aos próprios lados.



Como os triângulos ASB e ASC possuem mesma altura em relação a \overline{BC} , a razão entre suas áreas é igual à razão $\frac{SB}{SC}$ de suas bases.

Assim,

$$\frac{S(ASB)}{S(ASC)} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{cx}{2}}{\frac{by}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$

5.8 — As três simedionos de um triângulo são concorrentes.

Seja K o ponto de concursa das simedionos S_a e S_b .

$$K \in S_a \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

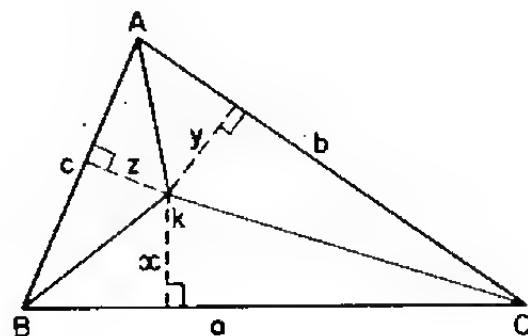
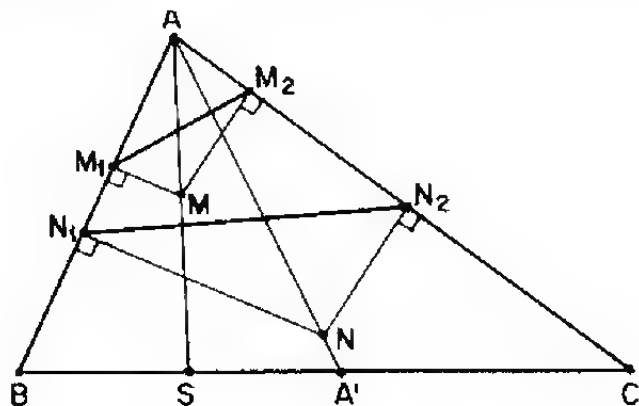
$$K \in S_b \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$$

$$\text{Concluimos que } \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

ou seja, $K \in S_c$.

O ponto K , de concursa das simedionas, é chamado *ponto de Lemoine* e é o único ponto cujas distâncias aos lados são proporcionais aos próprios lados. Além disso, devemos notar que a ponto K forma os triângulos KBC , KAC e KAB , de áreas proporcionais a a^2 , b^2 e c^2 , respectivamente.

5.9 — Se por um ponto de uma simediana (mediana) traçarmos perpendiculares aos lados adjacentes, o segmento que une os pés desses perpendiculares é perpendicular à mediana (simediano) correspondente.



Como AM_1MM_2 é inscritível, $M_1AM = M_1M_2M = A'AC$, o que mostro ser M_1M_2 perpendicular a AA' . Do mesmo forma demonstramos que N_1N_2 é perpendicular a AS .

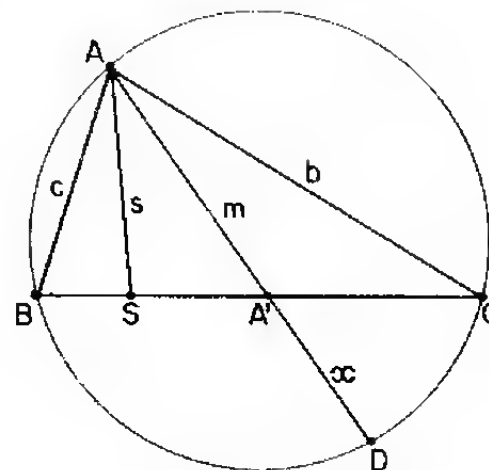
Concluimos, oindo, que:

- 1) M_1M_2 e N_1N_2 são antiparalelas em relação ao ângulo \hat{A} .
- 2) M_1, M_2, N_2 e N_1 são concíclicos.

De fato, pois se $\widehat{AM_1M_2} = \widehat{AN_1N_2}$, os triângulos AM_1M_2 e AN_1N_2 são semelhantes e $AM_1 \cdot AN_1 = AM_2 \cdot AN_2$, demonstrando as proposições acima.

Devemos notar que estas propriedades valem para dois cevianos isogonais quaisquer e as demonstrações são inteiramente análogas.

5.10 — Comprimento de uma simediana.



Sejam m e s o comprimento da mediana e simediana relativas ao lado a de um triângulo ABC . A mediana AA' corta o círculo circunscrito em D , e seja $A'D = x$.

Sabemos que

$$bc = S \cdot AD \quad \therefore \quad S = \frac{bc}{AD} \quad (1)$$

$$\text{mas } m \cdot x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{4m}$$

$$AD = m + x = m + \frac{a^2}{4m} = \frac{4m^2 + a^2}{4m}$$

$$AD = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} [2(b^2 + c^2) - a^2] + a^2}{4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

Levando em (1),

$$S = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

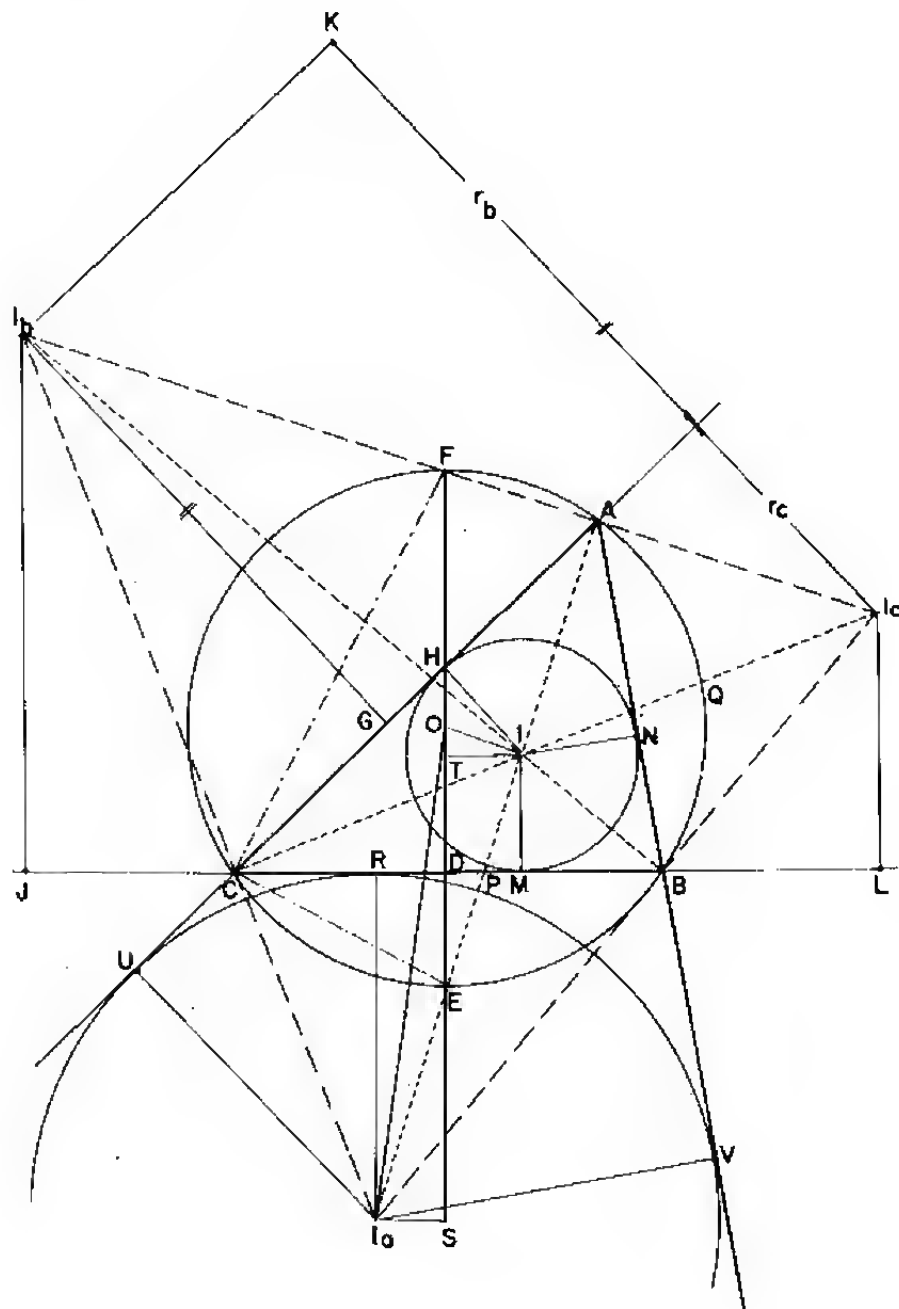
Analogamente, se

$$S_a = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

então

$$S_b = \frac{ac}{a^2 + c^2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} \quad e$$

$$S_c = \frac{ab}{a^2 + b^2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$



A-6 — AS FÓRMULAS DE EULER**6.1 — Relação dos cinco raios**

Considerando a figura da página anterior, verificamos inicialmente que as bissetrizes AI_a e AI_b são perpendiculares e que \overline{EF} é um diâmetro perpendicular a \overline{BC} em seu ponto médio D.

No trapézio $I_b J I_c$, temos

$$\left. \begin{array}{l} BJ = p \\ CL = p \end{array} \right\} \Rightarrow JC = BL$$

Como D é médio de \overline{JL} , \overline{DF} é base médio, sendo

$$DF = \frac{r_b + r_c}{2} \quad (1)$$

Temos ainda

$$BM = p - b = AU = AC - UC = CR \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CR = BM \\ RD = DM \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{CIE} = \widehat{ECI} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \\ \widehat{CI_a E} = \widehat{I_a C E} \end{array} \right\} \Rightarrow EB = EC = EI = EI_a$$

Se D e E são médios de \overline{RM} e $\overline{II_a}$, então podemos escrever

$$DE = \frac{r_a - r}{2} \quad (2)$$

Como $DE + DF = 2R$,

$$2R = \frac{r_b + r_c}{2} + \frac{r_a - r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{4R = r_a + r_b + r_c - r}$$

6.2 — Distância do incentro ao circuncentro

No triângulo OIE, temos

$$OI^2 = OE^2 + IE^2 - 2OE \cdot ET, \quad \text{mas}$$

$$IE^2 = EC^2 = 2R \cdot ED \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OI^2 = R^2 + 2R(ED - ET) = R^2 - 2R(ET - ED) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}}$$

6.3 — Distância do circuncentro a um exincentro

No triângulo $OI_a E$, temos

$$OI_a^2 = OE^2 + EI_a^2 + 2 \cdot OE \cdot ES, \quad \text{mas}$$

$$EI_a^2 = CE^2 = 2R \cdot ED \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OI_a^2 = R^2 + 2R(ED + ES) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} OI_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a} \\ OI_b = \sqrt{R^2 + 2Rr_b} \\ OI_c = \sqrt{R^2 + 2Rr_c} \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{e, análogamente,} \\ \text{e} \end{array}$$

6.4 — Distância do incentro a um exincentro

Temos

$$II_a = 2EI_a = 2CE^2$$

$$II_a^2 = 4 \cdot CE^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow II_a^2 = 4 \cdot 2R \cdot ED, \quad \text{mas} \quad ED = \frac{r_a - r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_a = 2\sqrt{R(r_a - r)} \\ l_b = 2\sqrt{R(r_b - r)} \\ l_c = 2\sqrt{R(r_c - r)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{e, analogamente,} \\ \text{e} \end{matrix}$$

6.5 — Distância entre dois exincentros

Calculemos $l_b l_c$.

$Fl_b = Fl_c$, sendo \overline{CF} mediana no triângulo retângulo $l_b Cl_c$.

$$2CF = l_b l_c$$

$$l_b l_c = 4 CF = 4 \cdot 2R \cdot FD,$$

$$\text{mas } FD = \frac{r_b + r_c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_b l_c = 2\sqrt{R(r_b + r_c)} \\ l_a l_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)} \\ l_a l_c = 2\sqrt{R(r_a + r_c)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{e, analogamente,} \\ \text{e} \end{matrix}$$

6.6 — Exemplos

6.6.1 — Calcular a raia do círculo circunscrito a um triângulo sabendo que a circuncentra e as exincentras relativas a a e b formam um triângulo equilátero de 4 m de lado.

Solução

Pelas fórmulas de Euler, temos

$$Ol_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}$$

$$Ol_b = \sqrt{R^2 + 2Rr_b}$$

$$l_a l_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)}$$

Das duas primeiras vemos que $r_a = r_b$.

Na última, temos

$$4 = 2\sqrt{R(2r_a)} \quad \text{ou}$$

$$R \cdot r_a = 2.$$

Levando na primeira, temos

$$16 = R^2 + 2 \cdot 2 \Rightarrow R^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 2\sqrt{3}m$$

6.6.2 — Na problema anterior, calcule os raios das círculas exinscrita e inscrita.

Solução

Da problema anterior,

$$\left. \begin{matrix} R \cdot r_a = 2 \\ R = 2\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r_a = r_b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Calculemos r_c e r pelas relações

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

6.6.3 — Em um triângulo de lados 4, 6 e 8, calcule, se possível, o comprimento da tangente traçada pelo circuncentra ao círculo inscrito.

Solução

Calculemos a área do triângulo.

$$S = \sqrt{9(1)(3)(5)} = 3\sqrt{15} \text{ a.a.}$$

Os raios dos círculos inscrito e circunscrito medem

$$5 = pr \Rightarrow 3\sqrt{15} = 9r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$abc = 4RS \Rightarrow 4 \cdot 6 \cdot 8 = 4 \cdot R \cdot 3\sqrt{15} \Rightarrow R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

A distância d entre o incentro e o circuncentro é dada por uma das fórmulas de Euler.

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - 2 \frac{16\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - \frac{32}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{96}{15}$$

Podemos, então, calcular a potência do circuncentro em relação ao círculo inscrito

$$\text{Pot}_{(i)} O = d^2 - r^2$$

$$\text{Pot}_{(i)} O = \frac{96}{15} - \frac{5}{3}$$

$$\text{Pot}_{(i)} O = \frac{71}{15}$$

Como a potência é positiva, o circuncentro é exterior ao círculo inscrito e, neste caso, a potência é dada pelo quadrado do segmento do tangente. Logo, o comprimento t pedido é

$$t = \sqrt{\frac{71}{15}}$$

A-7 — INVERSÃO

7.1 — Definição

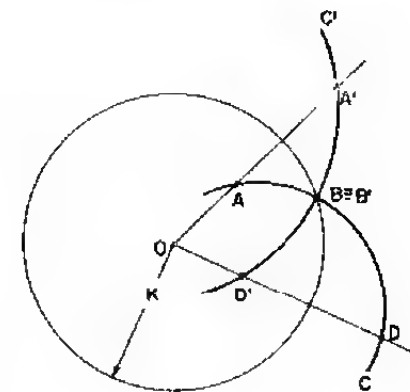
Consideremos um ponto O de um plano Z . Chamamos de inversão positivo de centro O e raio K a transformação em Z que faz corresponder a cada ponto P de Z um ponto P' do semi-reto OP , tal que

$$OP \cdot OP' = K^2$$

Os pontos do círculo de centro O e raio K são duplos. Se duas curvas C e C' são inversas, a sua interseção está necessariamente sobre este círculo. Os pontos A e A' , B e B' , C e C' são pontos inversos e escreveremos

$$A' = \text{Inv}(A), \quad B' = \text{Inv}(B) \quad \text{e} \quad C' = \text{Inv}(C)$$

e vice-versa.



7.2 — Produto de inversões de mesmo centro

Consideremos a inversão de centro O e raio K_1 que leva P em P_1 e a inversão de centro O e raio K_2 que leva P_1 em P_2 . Então,

$$OP \cdot OP_1 = K_1^2 \quad \text{e}$$

$$OP_1 \cdot OP_2 = K_2^2.$$

Dividindo membro a membro, obtemos

$$OP_2 = OP \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2$$

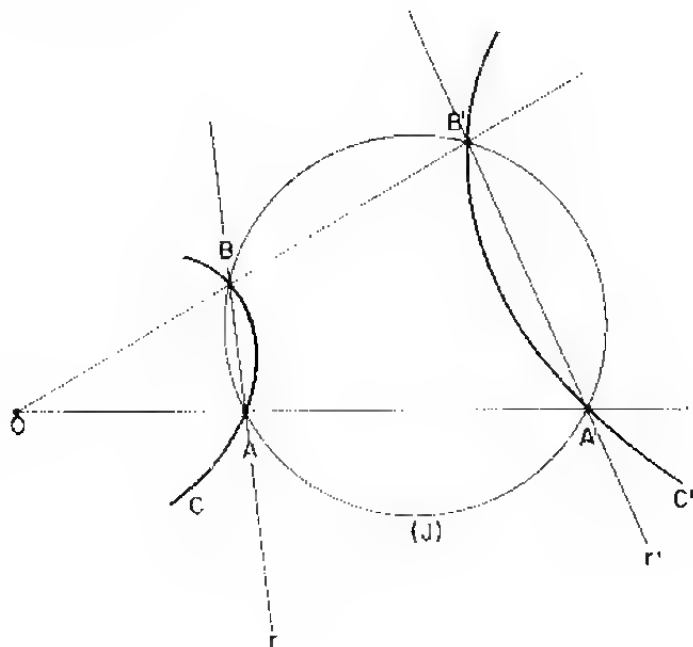
Vemos, então, que o produto de duas inversões de mesmo centro e raios

K_1 e K_2 é uma homotetia de centro O e razão $\left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2$

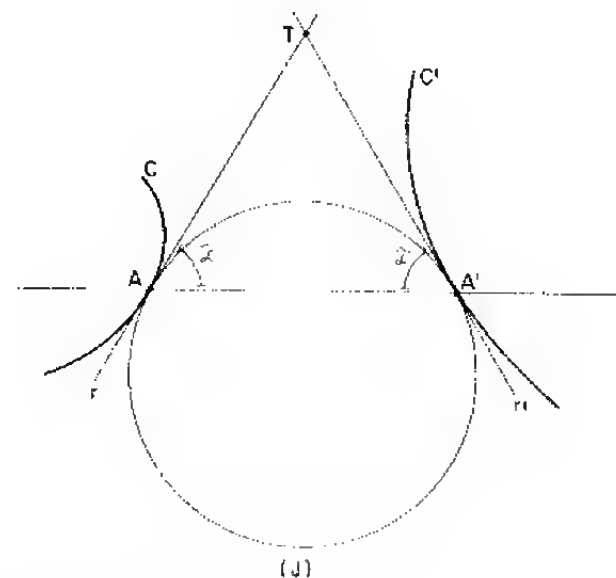
7.3 — Isogonalidade

7.3.1 — Teorema

Se dois pontos A e A' pertencem, respectivamente, às curvas inversas C e C' , as tangentes a essas curvas em A e A' formam ângulos iguais com a reta AA' .



Consideremos os pares de pontos inversos A e A' e B e B' . Porque $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, os pontos A, B, A' e B' pertencem a um mesmo círculo, sendo r e r' antiparalelas em relação a \hat{O} . Se B tende a A , B' tende a A' e, quando $B = A$, $B' = A'$. O círculo (J) será, então, tangente às curvas C e C' em A e A' , respectivamente, e as retas r e r' serão tangentes a esse círculo e às curvas C e C' .

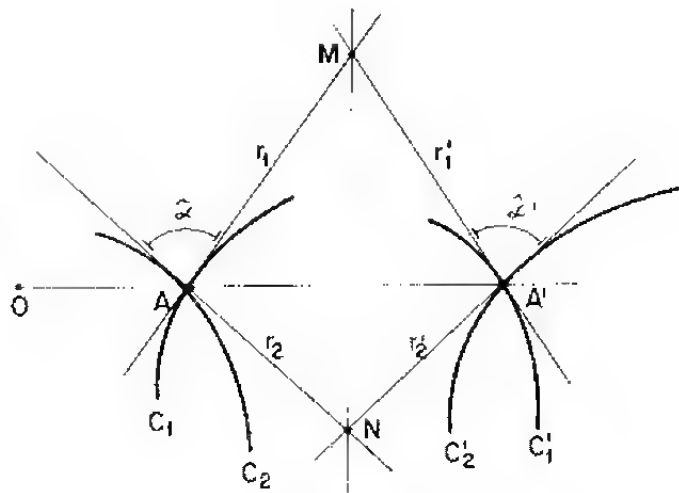


Vemos imediatamente que

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'.$$

7.3.2 — Teorema

Se duas curvas C_1 e C_2 formam ângulo α em um ponto de interseção A , as suas inversas C_1' e C_2' , na mesma inversão, formarão ângulo $\hat{\alpha}$ em um ponto de interseção A' , inverso de A .



Parque as triângulos MAA' e NAA' são isósceles, pelo teorema anterior, concluímos imediatamente que

$$\alpha = \alpha'.$$

7.4 — Transformação do círculo por inversão

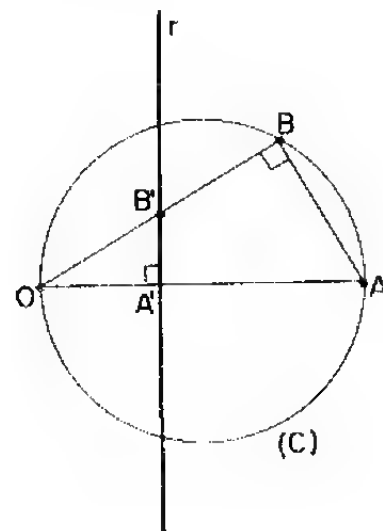
7.4.1 — O pólo é um ponto do círculo

Quando o pólo O de inversão é um ponto da círculo, a figura inversa do círculo é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa por O .

Seja A' do diâmetro \overline{OA} tal que

$$OA \cdot OA' = K^2.$$

Consideremos a reta r , que contém A' e é perpendicular a \overline{OA} . Seja B um ponto da círculo.



Vamos provar que B' , para que r intercepto \overline{OB} , é o inverso de B .

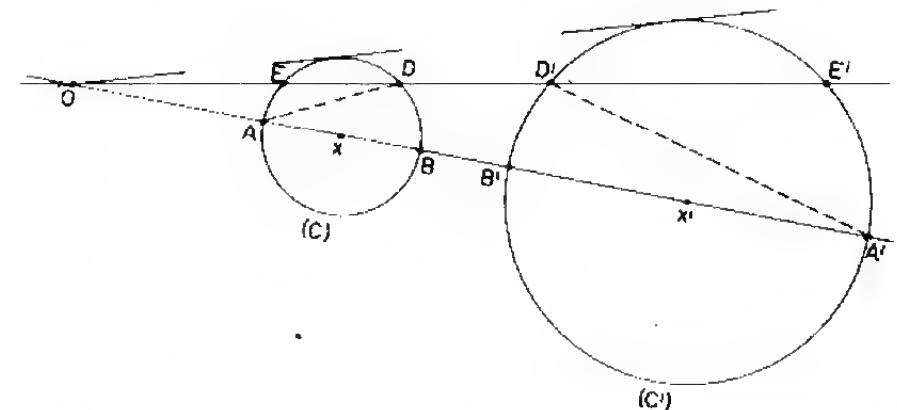
Sendo os triângulos $OA'B'$ e OBA semelhantes, temos

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} \Rightarrow OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = K^2$$

Então, como $B' = \text{Inv}(B)$, mostramos que

$$r = \text{Inv}(C).$$

7.4.2 — O pólo não pertence ao círculo



Quando o pólo de inversão não pertence ao círculo, a sua figura inversa é um outro círculo homotético do primeiro, numa homotetia de mesma centra.

Sejam $A' = \text{Inv}(A)$ e $B' = \text{Inv}(B)$.

Consideremos o círculo de diâmetro $\overline{A'B'}$. Temos, então,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = K^2 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

o que mostra que (C') é homotético de (C) , numa homotetia de centro O . Temos ainda, considerando uma secante qualquer,

$$\widehat{AE} = \widehat{B'D'} \Rightarrow \triangle OAD \sim \triangle OD'A' \Rightarrow \frac{OD}{OA'} = \frac{OA}{OD'}$$

$$OD \cdot OD' = OA \cdot OA' = K^2.$$

Então, $C' = \text{Inv}(C)$.

7.5 — Distância entre dois pontos inversos

Sejam $A' = \text{Inv}(A)$ e $B' = \text{Inv}(B)$.

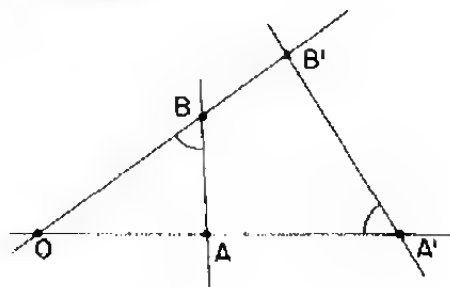
Porque as retas AB e $A'B'$ são antiparalelas, os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA}$$

$$\Rightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA}$$

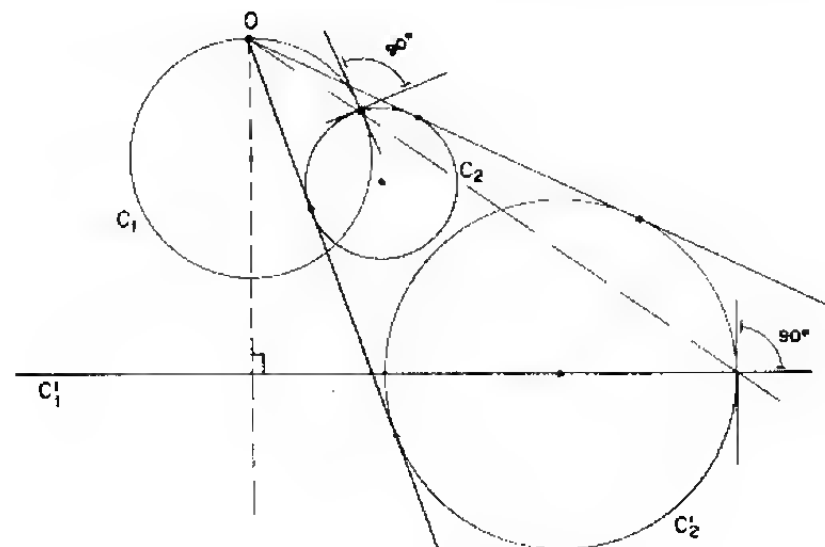
Mas $OB' = \frac{K^2}{OB}$. Então,

$$A'B' = AB \cdot \frac{K^2}{OA \cdot OB}$$



7.6 — Observação

Se dois círculos são ortogonais, a inversão cujo pólo é um ponto de um dos círculos transforma estes figuras num círculo e numa reta que passa pelo centro deste.



Este fato decorre imediatamente de 7.4 e 7.3.2.

7.7 — Aplicações

- 1) Demonstrar que, em um quadrilátero inscrito, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. (Teorema de Ptolomeu).

Sugestão

Transforme círculo em reta, numa inversão de pólo A . Como $B'D' = B'C' + C'D'$, aplique o resultado encontrado em 7.4.

- 2) Considere um quadrilátero ABCD. Prove que, se os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ADC forem ortogonais, os círculos circunscritos aos triângulos ABD e CBD também o serão.

Sugestão

Transforme os círculos (ABC) e (ADC) em retas, por inversão de pólo A. Lembre que essas retas são perpendiculares.

- 3) Considerando a quadrilátera do problema anterior, se a , b , c e d são os comprimentos dos lados, e p e q , os das diagonais, prove que

$$p^2q^2 = a^2c^2 + b^2d^2$$

- 4) Os pontos A, B, C e D formam uma divisão harmônica. Transformemos, por inversão de pólo A, os pontos B, C e D. Se $B' = \text{Inv}(B)$, $C' = \text{Inv}(C)$ e $D' = \text{Inv}(D)$, prove que B' é o ponto médio de $C'D'$.

- 5) Se um círculo é tangente internamente ao círculo circunscrito de um triângulo ABC e é tangente em P e Q os dois lados do triângulo, prove que o incentro do triângulo ABC é o ponto médio de \overline{PQ} .

Sugestão

Transforme os dois círculos, utilizando uma inversão de pólo A e raio \overline{AI} .

RESPOSTAS DOS TESTES

8 — B	15 — E	31 — D	38 — A
9 — D	16 — C	32 — C	39 — C
10 — D	17 — D	33 — B	40 — B
11 — C	18 — C	34 — A	51 — D
12 — A	19 — C	35 — C	52 — B
13 — C	20 — C	36 — E	53 — A
14 — B	30 — C	37 — A	54 — C

55 — C	102 — D	139 — B	214 — D
56 — C	103 — D	140 — D	215 — A
57 — D	104 — C	155 — C	216 — E
58 — E	105 — A	156 — D	217 — E
59 — D	106 — E	157 — D	218 — B
60 — A	107 — E	158 — C	219 — C
61 — C	108 — A	159 — A	220 — C
62 — C	109 — B	160 — E	221 — D
63 — D	110 — C	161 — C	222 — C
64 — D	111 — B	162 — A	223 — D
65 — B	112 — C	163 — C	224 — A
66 — B	113 — C	164 — D	225 — C
67 — A	114 — C	165 — B	226 — A
68 — C	115 — D	166 — A	227 — B
69 — C	116 — D	167 — D	228 — D
70 — D	117 — B	168 — B	229 — E
71 — A	118 — B	169 — D	230 — B
72 — C	119 — C	170 — C	231 — B
73 — E	120 — A	171 — A	232 — D
74 — A	121 — B	172 — D	233 — C
75 — B	122 — C	173 — B	234 — C
76 — B	123 — B	174 — C	235 — E
77 — B	124 — C	175 — A	236 — C
78 — A	125 — A	176 — D	237 — C
79 — A	126 — D	177 — C	238 — D
80 — C	127 — E	178 — D	239 — A
91 — D	128 — C	179 — C	240 — A
92 — C	129 — D	180 — B	241 — B
93 — D	130 — C	181 — C	242 — C
94 — D	131 — B	206 — C	243 — D
95 — D	132 — E	207 — A	244 — E
96 — B	133 — B	208 — C	245 — B
97 — B	134 — B	209 — C	246 — B
98 — E	135 — C	210 — D	247 — D
99 — A	136 — C	211 — C	248 — C
100 — C	137 — D	212 — D	249 — D
101 — C	138 — C	213 — C	250 — B

251 — C	289 — B	317 — B	362 — C
252 — A	290 — A	318 — B	363 — E
253 — D	291 — C	326 — C	364 — 8
254 — C	292 — B	327 — A	365 — D
255 — 8	293 — C	328 — A	366 — C
256 — A	294 — B	329 — C	367 — D
257 — D	295 — C	330 — D	368 — C
258 — C	296 — B	331 — C	369 — C
259 — D	297 — C	332 — 8	370 — 8
260 — D	298 — A	333 — 8	371 — D
261 — B	299 — D	334 — A	372 — B
262 — E	300 — D	335 — E	373 — D
263 — A	305 — D	336 — C	374 — C
264 — D	306 — D	337 — D	375 — C
265 — A	307 — B	338 — 8	376 — A
266 — D	308 — C	339 — E	377 — D
281 — A	309 — A	340 — A	378 — B
282 — C	310 — C	341 — E	379 — C
283 — D	311 — A	342 — D	380 — C
284 — D	312 — E	343 — C	381 — D
285 — E	313 — D	344 — D	382 — 8
286 — A	314 — B	359 — A	383 — D
287 — B	315 — C	360 — C	384 — C
288 — D	316 — E	361 — A	385 — B
			386 — C